

ANDRZEJ KOBRYŃ<sup>1)</sup>

## DOBÓR KRZYWEJ PRZEJŚCIOWEJ NA PODSTAWIE KRYTERIUM DYNAMIKI RUCHU<sup>2)</sup>

**STRESZCZENIE.** Praca zawiera rozważania dotyczące doboru krzywych przejściowych z uwzględnieniem kryteriów, które mają związek z warunkami dynamiki ruchu. W przypadkach, gdy nie wchodzi w grę stosowanie odpowiednio długich krzywych przejściowych, co umożliwiłoby redukcję niekorzystnego oddziaływania siły odśrodkowej na uczestników ruchu przy dużych prędkościach lub relatywnie małych promieniach krzywizn, zasadne wydaje się stosowanie takich krzywych przejściowych, które charakteryzowałyby się optymalnym rozkładem krzywizny z punktu widzenia warunków dynamiki ruchu. Kwestia optymalnego rozkładu krzywizny wydaje się otwarta. Może to zależeć od konkretnych potrzeb lub ewentualnych ograniczeń swobody kształtowania krzywoliniowych fragmentów tras drogowych. W niniejszej pracy, jako kryteria doboru krzywych przejściowych zaproponowano minimalizację sumarycznych wartości przyspieszenia odśrodkowego lub chwilowych zmian tego przyspieszenia w ich obrębie. Wyprowadzono odpowiednie wzory pozwalające na sprawną realizację analitycznych lub numerycznych obliczeń tych wartości. Proponowane kryteria zweryfikowano w odniesieniu do wybranych krzywych przejściowych.

<sup>1)</sup> dr inż. – Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska Politechniki Białostockiej

<sup>2)</sup> wyniki zaprezentowane w niniejszej pracy stanowią część rezultatów otrzymanych przez autora w ramach projektu badawczego Komitetu Badań Naukowych nr 9 T12 E 029 19

## 1. WPROWADZENIE

W celu stopniowego wprowadzenia działania siły odśrodkowej na pojazd poruszający się po łuku o określonym promieniu krzywizny są stosowane tzw. krzywe przejściowe, których zadaniem jest minimalizacja negatywnego oddziaływania siły odśrodkowej przy nagłej zmianie promienia krzywizny toru ruchu. Dotychczas o stosowaniu krzywoliniowych elementów geometrycznych w projektowaniu tras komunikacyjnych, zarówno drogowych jak i kolejowych, decydowała głównie ich prostota i łatwość wyznaczania w terenie. Obecne możliwości obliczeniowe i inne przesłanki pozwalają na odejście od takiego sposobu postępowania. Analiza literatury pozwala bowiem stwierdzić, że rzadko są podejmowane kwestie dotyczące optymalnej postaci tych krzywych. Jednym z możliwych kryteriów oceny, bezpośrednio związanym z zasadniczą rolą przypisywaną krzywym przejściowym, są wymagania wynikające z warunków dynamiki ruchu. Praca [1] dowodzi na przykład, że krzywe, które najlepiej spełniają wymagania stawiane krzywym przejściowym do zastosowań kolejowych, nie były dotychczas stosowane w praktyce projektowania dróg kolejowych, gdzie – z uwagi na duże prędkości i masy pojazdów szynowych – właściwy dobór krzywych przejściowych ma pierwszorzędne znaczenie z punktu widzenia bezpieczeństwa ruchu oraz trwałości nawierzchni i związanych z tym kosztów utrzymania. Jest to argument uzasadniający potrzebę dalszego poszukiwania optymalnych rozwiązań, których stosowanie praktyczne nie stwarza obecnie żadnych problemów z uwagi na komputeryzację projektowania.

Przy projektowaniu krzywych przejściowych w drogownictwie, kryteria dynamiki ruchu mają mniejsze znaczenie, a o doborze krzywych decydują również inne kryteria. Mniejsze znaczenie ma w tym przypadku ewentualny wpływ niewłaściwego ukształtowania drogi w planie sytuacyjnym i profilu podłużnym na trwałość nawierzchni drogowych, aczkolwiek problem ten z pewnością wymaga odrębnych badań. Ze względu na mniejsze masy pojazdów, czynnikiem istotnym w świetle warunków dynamiki ruchu jest potrzeba zapewnienia właściwego bezpieczeństwa i komfortu jazdy poprzez minimalizację negatywnego oddziaływania sił bocznych na uczestników ruchu. Może to być szczególnie istotne, jeśli wziąć pod uwagę dość powszechne przekraczanie dozwolonych prędkości w ruchu drogowym.

Zarówno w przypadku tras kolejowych, jak i drogowych, destrukcyjny wpływ siły odśrodkowej wynika z nadmiernych wielkości nie zrównoważonego przyspieszenia dośrodkowego oraz szybkości przyrostów tego przyspieszenia [2 - 4]. Istotne jest przy tym, że z wielkości nie zrównoważonego przyspieszenia nie wynikają żadne warunki odnoszące się do projektowania krzywych przejściowych. W kontekście warunków dynamiki ruchu, podstawę projektowania krzywych przejściowych w drogownictwie stanowi wyłącznie szybkość przyrostów przyspieszenia dośrodkowego, czyli – inaczej mówiąc – chwilowe przyrosty przyspieszenia dośrodkowego, w kolejnictwie zaś wspomniane, chwilowe przyrosty przyspieszenia i związana z tym prędkość podnoszenia się koła na rampie przechyłkowej. W dotychczasowej praktyce projektowania krzywych przejściowych w budownictwie drogowym i kolejowym przyjęło się ustalanie ich parametrów geometrycznych tak, aby nie zostały przekroczone dopuszczalne

wartości odpowiednich wskaźników dynamicznych. Nie podważając słuszności takiego podejścia, warto jednak pokusić się o inne spojrzenie na rozważany problem doboru krzywych przejściowych. Niniejsza praca dotyczy nowego kryterium doboru tych krzywych, które oparte jest na sumarycznej wartości chwilowych przyrostów przyspieszenia dośrodkowego lub sumarycznej wartości tego przyspieszenia w obrębie całej krzywej.

## 2. ROLA I ZADANIA KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Rozważając tor krzywoliniowy jako element przestrzenny, należy stwierdzić, że w ruchu po tym torze siła  $\vec{F} = m\vec{a}$  działająca na pojazd (traktowany jako punkt materialny o masie  $m$ ) w kierunku jego ruchu jest wypadkową takich sił, jak siła napędowa  $\vec{N}$ , siła tarcia  $\vec{T}$ , siła reakcji więzów  $\vec{W}$  i siła ciężkości  $\vec{G}$  [4]. Wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  określony znany wzorem

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1)$$

gdzie  $\vec{r}$  jest opisującą ruch funkcją wektorową czasu  $t$ , leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do krzywej będącej torem punktu i zgodnie z [4] wyraża się zależnością:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{t} + v^2k\vec{n}, \quad (2)$$

gdzie:

- $v$  – prędkość ruchu,
- $k$  – krzywizna toru,
- $\vec{t}$  i  $\vec{n}$  – odpowiednio wersor styczny i normalny główny trójścianu Freneta.

Z punktu widzenia dynamiki ruchu, decydujące znaczenie dla bezpieczeństwa i wygody ruchu ma składowa przyspieszenia na kierunku normalnym, która wynosi

$$a_n = v^2k \quad (3)$$

i decyduje o wartości działającej na pojazd i uczestników ruchu siły odśrodkowej, którą w przypadku punktu materialnego o masie  $m$  można wyrazić jako:

$$F_r = m\frac{v^2}{r}, \quad (4)$$

gdzie:

- $r$  – promień krzywizny toru.

Jak wynika z powyższego wzoru, przy bezpośrednim przejściu z kierunku prostoliniowego (nieskończenie duża wartość promienia  $r$ ) w łuk o określonym promieniu krzywizny następuje nagle pojawienie się siły odśrodkowej, co w przypadku dużej jej wartości (tym większej, im większa masa pojazdu lub prędkość ruchu lub im mniejszy promień krzywizny łuku) jest bardzo niekorzystne z punktu widzenia bezpieczeństwa i komfortu jazdy, jak również z powodu jej niszczącego wpływu na trwałość konstrukcji i nawierzchni toru, po którym odbywa się ruch pojazdu.

Potrzeba minimalizacji tych negatywnych zjawisk uzasadnia celowość stosowania krzywych przejściowych. Podstawowe warunki, jakim powinny odpowiadać krzywe przejściowe, to zerowanie się krzywizny w punkcie początkowym i osiągnięcie przez nią maksymalnej wartości w punkcie końcowym. Na całym odcinku krzywej przejściowej pomiędzy jej punktami skrajnymi zmiana krzywizny powinna być ponadto ciągła i monotoniczna.

Ze wzoru (3) wynika, że chcąc zapewnić nieprzekraczanie określonych, niekorzystnych z punktu widzenia dynamiki ruchu wartości przyśpieszenia dośrodkowego, należy w przypadku przyjętej wartości prędkości projektowej  $v$  ustalić odpowiedni promień krzywizny toru. Przyśpieszenie normalne jest zatem pomocne przy ustalaniu wymaganych promieni łuków, nie wpływa zaś na geometrię krzywej przejściowej, której zadaniem jest – jak wspomniano – łagodzenie negatywnych zjawisk wynikających z nagłego pojawienia się siły odśrodkowej.

U podłoża tych negatywnych zjawisk leżą natomiast zmiany przyśpieszenia na kierunku normalnym. W celu określenia zmian przyśpieszenia  $\vec{a}$  należy zróżniczkować względem czasu  $t$  równanie (2). Zgodnie z [5], pochodną przyśpieszenia wyrażonego równaniem (2) wyraża wzór

$$\vec{p} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \left( \frac{d^2 v}{dt^2} - v^3 k^2 \right) \vec{t} + \left( 3v \frac{dv}{dt} k + v^3 \frac{dk}{dl} \right) \vec{n} + v^3 s k \vec{b}, \quad (5)$$

gdzie:

$s$  – skręcenie (torsja) krzywej toru,

$\vec{b}$  – wersor binormalny trójścianu Freneta.

Z powyższego wynika, że składową chwilowych zmian przyśpieszenia na kierunku normalnym do toru określa wzór

$$p_n = 3v \frac{dv}{dt} k + v^3 \frac{dk}{dl}, \quad (6)$$

( $l$  parametr naturalny, określający długość łuku krzywoliniowego toru punktu), który po przyjęciu oznaczenia  $a = \frac{dv}{dt}$  zapiszemy jako

$$p_n = 3vak + v^3 \frac{dk}{dl}. \quad (7)$$

Przy stałej prędkości ruchu pojazdu, czyli  $a = 0$ , wzór (7) przyjmie postać

$$p_n = v^3 \frac{dk}{dl} . \quad (8)$$

Jak widać, chwilowe przyrosty przyśpieszenia dośrodkowego zależą – obok prędkości ruchu – od zmian krzywizny toru  $\frac{dk}{dl}$ . W ogólnym przypadku, tzn. przy zmiennej prędkości ruchu, na wartości chwilowych przyrostów przyśpieszenia dośrodkowego ma wpływ również krzywizna toru.

Zadaniem krzywych przejściowych jest łagodne wprowadzenie w krzywiznę, tak aby nie zostały przekroczone dopuszczalne przyrosty przyśpieszenia dośrodkowego. Zgodnie z powyższymi wzorami, zachowanie warunku dynamicznego w postaci nieprzekraczania ustalonych, dopuszczalnych wartości przyrostów przyśpieszenia dośrodkowego wymaga określenia dopuszczalnej prędkości zmian krzywizny względem długości łuku, tzn. maksymalnej wartości  $\frac{dk}{dl}$ . Jest to bardzo istotny warunek projektowania krzywych przejściowych. Wartości  $\frac{dk}{dl}$  kształtują się w różny sposób na poszczególnych krzywych przejściowych i zależą między innymi od minimalnego promienia krzywizny na końcu krzywej oraz całkowitej długości krzywej przejściowej. Nieprzekraczanie dopuszczalnych przyrostów przyśpieszenia dośrodkowego pozostaje w ścisłym związku z zachowaniem odpowiednich wartości krzywizny w poszczególnych punktach przejścia krzywoliniowego oraz prędkości jej zmian. Chcąc zapewnić nieprzekraczanie ustalonej, maksymalnej wartości przyrostu przyśpieszenia dośrodkowego, należy dla określonej wartości promienia wyznaczyć niezbędną długość krzywej.

### 3. PROPONOWANE KRYTERIUM DOBORU KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Jak już wcześniej wspomniano, zadaniem krzywych przejściowych jest zapewnienie nieprzekraczania określonych, maksymalnych wartości chwilowych przyrostów przyśpieszenia dośrodkowego. Należy przy tym stwierdzić, że maksymalne wartości przyrostów przyśpieszenia dośrodkowego, jakie wynikają z przebiegu zmian krzywizny, czyli wartości  $\frac{dk}{dl}$ , w obrębie poszczególnych krzywych, nie powinny być jedynym kryterium oceny tego, jakie krzywe są najkorzystniejsze w świetle warunków dynamicznych. Wynika to chociażby z faktu, że położenie maksimum  $\frac{dk}{dl}$  w obrębie poszczególnych krzywych jest bardzo różne. Dlatego wskazane jest nieco inne spojrzenie na to zagadnienie. Warto bowiem zwrócić uwagę na rzeczywiste wartości tych przyrostów, kiedy ruch odbywa się nie z określoną prędkością  $v_0$ , lecz z prędkością

od niej większą o  $\Delta v$ . W tym przypadku, przy założeniu stałości prędkości  $v = v_o + \Delta v$ , rzeczywiste wartości przyspieszenia dośrodkowego nie wyniosą

$$a_o = v_o^2 k , \quad (9)$$

lecz

$$a_n = (v_o + \Delta v)^2 k . \quad (10)$$

Różnica przyspieszeń wyniesie

$$\Delta a = a_n - a_o . \quad (11)$$

Ponieważ jednak

$$(v_o + \Delta v)^2 = v_o^2 \left( 1 + 2 \frac{\Delta v}{v_o} + \frac{\Delta v^2}{v_o^2} \right) , \quad (12)$$

zatem wartość  $\Delta a$  zapiszemy jako

$$\Delta a = v_o^2 \left( 2 \frac{\Delta v}{v_o} + \frac{\Delta v^2}{v_o^2} \right) k . \quad (13)$$

Z powyższego wynika, że

$$\frac{\Delta a}{a_o} = 2 \frac{\Delta v}{v_o} + \frac{\Delta v^2}{v_o^2} . \quad (14)$$

Natomiast w przypadku przyrostów przyspieszenia zamiast wartości

$$p_o = v_o^3 \frac{dk}{dl} , \quad (15)$$

wystąpią rzeczywiste przyrosty równe

$$p_n = (v_o + \Delta v)^3 \frac{dk}{dl} , \quad (16)$$

ponieważ

$$(v_o + \Delta v)^3 = v_o^3 \left( 1 + 3 \frac{\Delta v}{v_o} + 3 \frac{\Delta v^2}{v_o^2} + 3 \frac{\Delta v^3}{v_o^3} \right) . \quad (17)$$

Zatem różnica przyrostów przyspieszenia

$$\Delta p = p_n - p_o \quad (18)$$

wyniesie:

$$\Delta p = v_o^3 \left( 3 \frac{\Delta v}{v_o} + 3 \frac{\Delta v^2}{v_o^2} + \frac{\Delta v^3}{v_o^3} \right) \frac{dk}{dl} . \quad (19)$$

Z powyższego wynika, że

$$\frac{\Delta p}{p_o} = 3 \frac{\Delta v}{v_o} + 3 \frac{\Delta v^2}{v_o^2} + \frac{\Delta v^3}{v_o^3} . \quad (20)$$

Jak widać, przekroczenie prędkości projektowej  $v_o$  o pewną wartość  $\Delta v$  wiąże się z pojawieniem się dodatkowych wartości przyśpieszenia dośrodkowego oraz przyrostów tego przyśpieszenia podczas ruchu po krzywej, tym większych, im większy jest stosunek przyrostu prędkości  $\Delta v$  do prędkości projektowej  $v_o$ . Wartości wyznaczone na podstawie zależności (14) oraz (20) dla różnych wartości  $v_o$  i  $\Delta v$  zestawiono w tabelach 1 oraz 2.

Tablica 1. Wartości względnych zmian  $\Delta a / a_o$  [%]  
Table 1. The values of the relative changes  $\Delta a / a_o$  [%]

| Prędkość $v_o$ [km/h] | Przyrost prędkości $\Delta v$ [km/h] |      |      |      |       |       |       |       |
|-----------------------|--------------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
|                       | 1                                    | 2    | 5    | 10   | 15    | 20    | 25    | 30    |
| 30                    | 6,8                                  | 13,8 | 36,1 | 77,8 | 125,0 | 177,8 | 236,1 | 300,0 |
| 40                    | 5,1                                  | 10,2 | 26,6 | 56,3 | 89,1  | 125,0 | 164,1 | 206,3 |
| 50                    | 4,0                                  | 8,2  | 21,0 | 44,0 | 69,0  | 96,0  | 125,0 | 156,0 |
| 60                    | 3,4                                  | 6,8  | 17,4 | 36,1 | 56,3  | 77,8  | 100,7 | 125,0 |
| 70                    | 2,9                                  | 5,8  | 14,8 | 30,6 | 47,4  | 65,3  | 84,2  | 104,1 |
| 80                    | 2,5                                  | 5,1  | 12,9 | 26,6 | 41,0  | 56,3  | 72,3  | 89,1  |
| 90                    | 2,2                                  | 4,5  | 11,4 | 23,5 | 36,1  | 49,4  | 63,3  | 77,8  |
| 100                   | 2,0                                  | 4,0  | 10,2 | 21,0 | 32,2  | 44,0  | 56,3  | 69,0  |
| 110                   | 1,8                                  | 3,7  | 9,3  | 19,0 | 29,1  | 39,7  | 50,6  | 62,0  |
| 120                   | 1,7                                  | 3,4  | 8,5  | 17,4 | 26,6  | 36,1  | 46,0  | 56,3  |

Wskazują one na duże znaczenie wskaźników dynamicznych w postaci przyśpieszenia dośrodkowego oraz przyrostów tego przyśpieszenia jako kryterium projektowania krzywych przejściowych i skłania do poszukiwania takich krzywych, które – przy założeniu nieprzekraczania założonych maksymalnych wartości przyśpieszenia dośrodkowego – zapewniają optymalny rozkład wspomnianych wskaźników dynamicznych na całej długości krzywej. Jest uzasadnione, aby za najbardziej optymalne krzywe w świetle warunków dynamiki ruchu przyjmować takie krzywe, które charakteryzuje minimalna sumaryczna wartość tych wskaźników na całej długości krzywej.

Tablica 2. Wartości względnych zmian  $\Delta\rho / \rho_o$  [%]  
 Table 2. The values of the relative changes  $\Delta\rho / \rho_o$  [%]

| Prędkość $v_o$ [km/h] | Przyrost prędkości $\Delta v$ [km/h] |      |      |       |       |       |       |       |
|-----------------------|--------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                       | 1                                    | 2    | 5    | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    |
| 30                    | 10,3                                 | 21,4 | 58,8 | 137,0 | 237,5 | 363,0 | 516,2 | 700,0 |
| 40                    | 7,7                                  | 15,8 | 42,4 | 95,3  | 160,0 | 237,5 | 329,1 | 435,9 |
| 50                    | 6,1                                  | 12,5 | 33,1 | 72,8  | 119,7 | 174,4 | 237,5 | 435,9 |
| 60                    | 5,1                                  | 10,3 | 27,1 | 58,8  | 95,3  | 137,0 | 184,3 | 237,5 |
| 70                    | 4,3                                  | 8,8  | 23,0 | 49,3  | 79,0  | 112,5 | 150,0 | 191,5 |
| 80                    | 3,8                                  | 7,7  | 19,9 | 42,4  | 67,5  | 95,3  | 126,1 | 160,0 |
| 90                    | 3,4                                  | 6,8  | 17,6 | 37,2  | 58,8  | 82,6  | 108,6 | 137,0 |
| 100                   | 3,0                                  | 6,1  | 15,8 | 33,1  | 52,1  | 72,8  | 95,3  | 119,6 |
| 110                   | 2,8                                  | 5,6  | 14,3 | 29,8  | 46,7  | 65,1  | 84,9  | 106,2 |
| 120                   | 2,5                                  | 5,1  | 13,0 | 27,1  | 42,4  | 58,8  | 76,4  | 95,3  |

Z uwagi na rolę przypisywaną chwilowym przyrostom przyspieszenia dośrodkowego w odniesieniu do krzywych przejściowych, jako kryterium porównawcze krzywych przejściowych oparte na warunkach dynamiki ruchu można przyjąć wartość wyrażenia [6]:

$$P = \int_0^L (p_n)^2 dl, \quad (21)$$

przy czym wartość  $p_n$  jest opisana ogólnym wzorem (7).

Przyjmując w ogólnym przypadku, że prędkość ruchu po krzywej nie jest stała i biorąc pod uwagę, że wektor prędkości w ruchu krzywoliniowym jest skierowany zgodnie ze styczną do toru, prędkość  $v$  możemy określić jako

$$v = \frac{dl}{dt}, \quad (22)$$

gdzie:

$l$  – miara łukowa (parametr naturalny),  $t$  – czas.

W ogólnym przypadku prędkość i przyspieszenie mają różne kierunki w przestrzeni, przy czym pochodna względem czasu wartości liczbowej prędkości jest składową styczną przyspieszenia [4]. Zgodnie z (2), składowa przyspieszenia na kierunku stycznym do toru wynosi

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \quad (23)$$



Przyjmując, że ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem  $a = \frac{dv}{dt}$  stycznym do toru ruchu, aktualną prędkość – na podstawie znanych równań mechaniki – można wyrazić z pewnym przybliżeniem jako:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2al} \quad , \quad (24)$$

gdzie:

$v_o$  – prędkość początkowa.

Jeśli wartość tę utożsamimy z prędkością projektową, to dla założonych wartości przyspieszenia można wyznaczyć wartość całki (21), określającej wskaźnik porównawczy krzywych, mający związek z przekroczeniem tej prędkości projektowej. Po wprowadzeniu oznaczeń:  $A = 3a$  [m/s],  $B = v_o^2$  [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>],  $C = 2a$  [m/s] zależność (7) opisująca przyrosty przyspieszenia na kierunku normalnym do toru przyjmie postać

$$p_n = A(B + Cl)^{1/2} k + (B + Cl)^{3/2} \frac{dk}{dl} \quad . \quad (25)$$

Uwzględniając (25) w (21), ostatecznie otrzymamy

$$P = A^2 \int_0^L (B + Cl) k^2 dl + 2A \int_0^L (B + Cl)^2 \left( k \frac{dk}{dl} \right) dl + \int_0^L (B + Cl)^3 \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl \quad , \quad (26)$$

co zapiszemy jako:

$$P = P_I + P_{II} + P_{III} \quad , \quad (27)$$

gdzie:

$$P_I = A^2 B \int_0^L k^2 dl + A^2 C \int_0^L l k^2 dl \quad , \quad (28)$$

$$P_{II} = 2AB^2 \int_0^L \left( k \frac{dk}{dl} \right) dl + 4ABC \int_0^L l \left( k \frac{dk}{dl} \right) dl + 2AC^2 \int_0^L l^2 \left( k \frac{dk}{dl} \right) dl \quad (29)$$

$$P_{III} = B^3 \int_0^L \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl + 3B^2 C \int_0^L l \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl + 3BC^2 \int_0^L l^2 \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl + C^3 \int_0^L l^3 \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl \quad . \quad (30)$$

Innym kryterium doboru krzywych przejściowych optymalnych w świetle warunków dynamiki ruchu może być wartość całki [6]:

$$Q = \int_0^L (a_n)^2 dl \quad , \quad (31)$$

która odzwierciedla sumaryczną wartość siły odśrodkowej działającej na pojazd w obrębie danej krzywej przejściowej.

Stosując przyjęte oznaczenia ( $B = v_o^2$ ,  $C = 2a$ ), przyśpieszenie dośrodkowe  $a_n$  wyrażone wzorem (3) zapiszemy jako:

$$a_n = (B + Cl)k \quad (32)$$

Łączna wartość siły odśrodkowej na krzywej przejściowej będzie więc zależna od wartości

$$Q = \int_0^L (B + Cl)^2 k^2 dl \quad (33)$$

skąd wynika

$$Q = B^2 \int_0^L k^2 dl + 2BC \int_0^L lk^2 dl + C^2 \int_0^L l^2 k^2 dl \quad (34)$$

Elementami składowymi wyrażeń (26) oraz (34) są całki

$$P_1 = A^2 B \int_0^L k^2 dl \quad (35)$$

$$P_2 = B^3 \int_0^L \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl \quad (36)$$

$$Q_1 = B^2 \int_0^L k^2 dl \quad (37)$$

Odpowiadają one kryteriom doboru tzw. krzywych przejściowych proponowanym w pracy [5]. Kryteria te, w przypadku istnienia kilku rozwiązań spełniających te same warunki geometryczne, miałyby służyć do wyboru spośród nich rozwiązania przewidzianego do realizacji. Zostały one sformułowane jako:

$$F_1 = \int_0^L k^2 dl \quad (38)$$

$$F_2 = \int_0^L \left( \frac{dk}{dl} \right)^2 dl \quad (39)$$

Proponuje się tam, aby całkę (38) stosować jako kryterium sumarycznej wartości siły odśrodkowej działającej na pojazd na danym przejściu krzywoliniowym, która zgodnie ze wzorem (4) jest proporcjonalna do krzywizny toru pojazdu. Całka (39) miałaby zaś służyć jako kryterium dodatkowe. W przypadku doboru optymalnych krzywych przejściowych opartego na sumarycznych wartościach przyśpieszenia dośrodkowego i przyrostów tego przyśpieszenia, jak to przyjęto w ramach niniejszej pracy, wartości określone wzorami (38) i (39) odgrywałyby jednak nieco inną rolę.

Składowa zależna od wartości całki (38), o ile wpływa na sumaryczną wartość przyspieszenia dośrodkowego zarówno przy stałej, jak i zmiennej prędkości ruchu, a przy stałej prędkości ma na nią nawet wyłączny wpływ, który wyraża się wzorem (37), to w odniesieniu do sumarycznej wartości chwilowych przyrostów przyspieszenia dośrodkowego jej wpływ występuje jedynie przy zmiennej prędkości ruchu, co wynika ze wzoru (28). Natomiast składowa zależna od wartości całki (39) ma wpływ jedynie na sumaryczną wartość przyrostów przyspieszenia dośrodkowego, która – jak wynika z równania (30) – przy stałej prędkości ruchu przybiera wartość wyrażoną równaniem (36).

Poszczególne człony  $P_I$ ,  $P_{II}$  i  $P_{III}$  wyrażenia (27), jak też całka (34) dają się stosunkowo prosto wyrazić w przypadku krzywych określonych funkcją ich krzywizny. Jeśli mamy do czynienia np. z krzywymi danymi w postaci funkcji jawnej  $y = f(x)$ , odpowiednie wzory są relatywnie dużo bardziej rozbudowane, co wynika ze sposobu wyrażenia krzywizny, jak też jej pochodnych  $\frac{dk}{dl}$ . W tym przypadku krzywiznę opisuje znany wzór postaci

$$k(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (40)$$

natomiast wartość  $\frac{dk}{dl}$  wyrazimy zgodnie z zasadami geometrii różniczkowej jako

$$\frac{dk}{dl} = \frac{dk(x)}{dx} \frac{dx}{dl}, \quad (41)$$

przy czym:

$$\frac{dk(x)}{dx} = \frac{y''' + y'''y'^2 - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}} \quad (42)$$

oraz

$$\frac{dx}{dl} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (43)$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\frac{dk}{dl} = \frac{y''' + y'''y'^2 - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^3}. \quad (44)$$

W wyjątkowych przypadkach, tzn. przy założeniu małych kątów zwrotu stycznych w punktach końcowych, możliwe jest dla krzywych  $y = f(x)$  upraszczające przyjęcie

$$k(x) \cong y'' \quad \text{oraz} \quad \frac{dk(x)}{dx} \cong y''',$$

co pozwoli zapisać

$$p_n \equiv A(B + Cx)^{1/2} y'' + (B + Cx)^{3/2} y''' , \quad (45)$$

$$a_n \equiv (B + Cx)y'' . \quad (46)$$

Prowadzi to w rezultacie do całek

$$P = A^2 \int_0^{x_k} (B + Cx)(y'')^2 dx + 2A \int_0^{x_k} (B + Cx)^2 y'' y''' dx + \int_0^{x_k} (B + Cx)^3 (y''')^2 dx , \quad (47)$$

$$Q = B^2 \int_0^{x_k} (y'')^2 dx + 2BC \int_0^{x_k} x(y'')^2 dx + C^2 \int_0^{x_k} x^2 (y'')^2 dx . \quad (48)$$

Z uwagi na postaci zależności określających krzywiznę oraz jej zmiany w przypadku krzywych  $y = f(x)$ , przy większych wartościach kątów zwrotu stycznych w punktach końcowych takie uproszczenie nie jest możliwe, w związku z czym – ogólnie rzecz biorąc – wyznaczenie wartości  $P$  i  $Q$  praktycznie byłoby możliwe poprzez zastosowanie całkowania numerycznego.

#### 4. WERYFIKACJA KRYTERIUM NA PRZYKŁADZIE KRZYWYCH OKREŚLONYCH FUNKCJĄ ICH KRZYWIZNY

Z uwagi na to, że matematyczna postać krzywych określonych funkcją ich krzywizny jest w porównaniu z innymi krzywymi dużo wygodniejsza, gdy chodzi o analizy związane z rozkładem krzywizny, przeanalizujemy wartości całek  $P$  i  $Q$  w odniesieniu do krzywych danych jako  $k = k(l)$ . Zostaną wzięte pod uwagę następujące krzywe:

- klotoida

$$k(l) = \frac{1}{R} \frac{l}{L} , \quad (49)$$

gdzie:

$L$  – całkowita długość krzywej do końcowego punktu, w którym promień krzywizny osiąga wartość minimalną  $R$

$l$  – odległość dowolnego punktu krzywej od jej początku mierzona wzdłuż łuku,

- krzywa Blossa [7], znana też jako krzywa Göldnera [8]

$$k(l) = \frac{1}{R} \left[ 3 \left( \frac{l}{L} \right)^2 - 2 \left( \frac{l}{L} \right)^3 \right] , \quad (50)$$

- krzywa przedstawiona przez Grabowskiego [9]

$$k(l) = \frac{1}{R} \left[ 10 \left( \frac{l}{L} \right)^3 - 15 \left( \frac{l}{L} \right)^4 + 6 \left( \frac{l}{L} \right)^5 \right], \quad (51)$$

- tzw. krzywe hamowania [10]

$$k(l) = \frac{1}{R} \left( \frac{l}{L} \right)^n, \quad (52)$$

przy czym należy zauważyć, że przy  $n=1$  powyższe równanie opisuje kłotoidę.

Wykorzystując odpowiednie zależności opisujące krzywiznę tych krzywych oraz jej przyrosty  $\frac{dk}{dl}$ , na podstawie zależności (26) otrzymamy:

- kłotoida (49)

$$\begin{aligned} P_I^{(49)} &= A^2 B \frac{1}{3} \frac{L}{R^2} + A^2 C \frac{1}{4} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{II}^{(49)} &= 2AB^2 \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} + 4ABC \frac{1}{3} \frac{L}{R^2} + 2AC^2 \frac{1}{4} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{III}^{(49)} &= B^3 \frac{1}{R^2 L} + 3B^2 C \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} + 3BC^2 \frac{1}{3} \frac{L}{R^2} + C^3 \frac{1}{4} \frac{L^2}{R^2}, \end{aligned}$$

- krzywa Blossa (50)

$$\begin{aligned} P_I^{(50)} &= A^2 B \frac{13}{35} \frac{L}{R^2} + A^2 C \frac{2}{7} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{II}^{(50)} &= 2AB^2 \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} + 4ABC \frac{11}{35} \frac{L}{R^2} + 2AC^2 \frac{3}{14} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{III}^{(50)} &= B^3 \frac{6}{5} \frac{1}{R^2 L} + 3B^2 C \frac{3}{5} \frac{1}{R^2} + 3BC^2 \frac{12}{35} \frac{L}{R^2} + C^3 \frac{3}{14} \frac{L^2}{R^2}, \end{aligned}$$

- krzywa Grabowskiego (51)

$$\begin{aligned} P_I^{(51)} &= A^2 B \frac{181}{462} \frac{L}{R^2} + A^2 C \frac{10}{33} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{II}^{(51)} &= 2AB^2 \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} + 4ABC \frac{281}{924} \frac{L}{R^2} + 2AC^2 \frac{13}{66} \frac{L^2}{R^2}, \\ P_{III}^{(51)} &= B^3 \frac{10}{7} \frac{1}{R^2 L} + 3B^2 C \frac{5}{7} \frac{1}{R^2} + 3BC^2 \frac{30}{77} \frac{L}{R^2} + C^3 \frac{5}{22} \frac{L^2}{R^2}, \end{aligned}$$

- krzywe hamowania (52)

$$P_I^{(52)} = A^2 B \frac{1}{2n+1} \frac{L}{R^2} + A^2 C \frac{1}{2n+2} \frac{L^2}{R^2},$$

$$P_{II}^{(52)} = 2AB^2 \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} + 4ABC \frac{n}{2n+1} \frac{L}{R^2} + 2AC^2 \frac{n}{2n+2} \frac{L^2}{R^2},$$

$$P_{III}^{(52)} = B^3 \frac{n^2}{2n-1} \frac{1}{R^2 L} + 3B^2 C \frac{n}{2} \frac{1}{R^2} + 3BC^2 \frac{n^2}{2n+1} \frac{L}{R^2} + C^3 \frac{n^2}{2n+2} \frac{L^2}{R^2}.$$

Z kolei na podstawie zależności (34) dla tych samych krzywych otrzymamy:

- klotoida (49)

$$Q^{(49)} = B^2 \frac{1}{3} \frac{L}{R^2} + 2BC \frac{1}{4} \frac{L^2}{R^2} + C^2 \frac{1}{5} \frac{L^3}{R^2},$$

- krzywa Blossa (50)

$$Q^{(50)} = B^2 \frac{13}{35} \frac{L}{R^2} + 2BC \frac{2}{7} \frac{L^2}{R^2} + C^2 \frac{29}{126} \frac{L^3}{R^2},$$

- krzywa Grabowskiego (51)

$$Q^{(51)} = B^2 \frac{181}{462} \frac{L}{R^2} + 2BC \frac{10}{33} \frac{L^2}{R^2} + C^2 \frac{314}{1287} \frac{L^3}{R^2},$$

- krzywe hamowania (52)

$$Q^{(52)} = B^2 \frac{1}{2n+1} \frac{L}{R^2} + 2BC \frac{1}{2n+2} \frac{L^2}{R^2} + C^2 \frac{1}{2n+3} \frac{L^3}{R^2}.$$

W tym miejscu zostaną przedstawione wyniki numerycznej realizacji powyższych zależności. W tabelicy 3 zamieszczono wartości całek  $P$  wyznaczone dla różnych wariantów w zakresie prędkości, przyspieszenia oraz całkowitej długości  $L$  krzywych i minimalnego promienia krzywizny  $R$ . W tabelicy 4 podano natomiast wartości całek  $Q$ .

Zauważmy, że wartości stosunku  $L/R$ , dla których przytoczono wartości odpowiednich całek w tabelicach 3 i 4 odbiegają od stosowanych w praktyce projektowania krzywych przejściowych w drogownictwie. W tym przypadku, autor jest jednak zdania, że obecnie – w związku z upowszechnieniem komputerowych metod projektowania – zasadne jest odejście od tradycyjnej roli przypisywanej krzywom przejściowym i rozpatrywanie ich również jako niezależny element geometryczny, którego stosowanie może wynikać z potrzeby łatwiejszego dostosowania przebiegu trasy do ograniczeń terenowych.

Przytoczone zestawienia potwierdzają przydatność przyjętych kryteriów doboru krzywych przejściowych. Dzięki nim możliwe jest uchwycenie różnic pomiędzy poszczególnymi krzywymi, które zależą od określonego zestawu parametrów projektowych, takich jak prędkość projektowa, przyspieszenie, promień krzywizny oraz kąt zwrotu stycznej do krzywej w końcowym punkcie krzywej. Jak widać, wartości poszczególnych całek generalnie są tym większe, im większa jest prędkość ruchu, wskutek czego także różnice pomiędzy poszczególnymi krzywymi w zakresie sumarycznych wartości przyspieszenia dośrodkowego oraz przyrostów tego przyspieszenia rosną tym szybciej, im większa jest prędkość ruchu. Nie jest to tendencja ogólna, czego przykładem są wartości uzyskane w przypadku przyspieszenia  $a = -1 \text{ m/s}^2$  oraz prędkości  $v_o = 60 \text{ km/h}$ .

Istotne jest również, że kolejność poszczególnych krzywych określona na podstawie wartości całek  $P$  lub  $Q$  nie jest stała, co jest wyraźną wskazówką, że – chcąc dokonać wyboru krzywej optymalnej w świetle przyjętych kryteriów opartych na warunkach dynamiki ruchu – każdorazowo niezbędna jest odrębna analiza wchodzących w grę krzywych przejściowych. Dowodzą tego wartości całek odnoszące się do  $a = -1 \text{ m/s}^2$  oraz  $v_o = 60 \text{ km/h}$ . W tym przypadku np. kłotoida, która generalnie wykazuje najmniejsze wartości całek  $P$  i  $Q$ , nie okazuje się krzywą najkorzystniejszą.

Warto również zauważyć, że nie zawsze wartości całek rosną wraz ze wzrostem stosunku długości  $L$  do promienia  $R$ . Stąd też należy podkreślić, że właściwy dobór krzywych najkorzystniejszych w świetle warunków dynamiki ruchu wymaga każdorazowo oparcia się na odpowiadających im wartościach całek  $P$  lub  $Q$ .

Tablica 3. Wartości całek  $P$  dla wybranych krzywych  
 Table 3. The values of integrals  $P$  for selected curves

| Prędkość $v_0$<br>[km/h] | Krzywa          | Stosunek<br>$L/R$ | $a = 1 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = 0 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = -1 \text{ m/s}^2$ |                      |
|--------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
|                          |                 |                   | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$    | $R = 1000 \text{ m}$ |
|                          |                 |                   |                       |                      |                       |                      |                        |                      |
|                          | (49)            | 2                 | 190,35                | 58,81                | 10,72                 | 0,01                 | -2,25                  | -42,12               |
|                          |                 | 1                 | 121,90                | 17,15                | 21,43                 | 0,02                 | 4,30                   | -8,77                |
|                          |                 | 1/2               | 113,12                | 5,71                 | 42,87                 | 0,04                 | 14,28                  | -1,46                |
|                          | (50)            | 2                 | 195,12                | 56,86                | 12,86                 | 0,01                 | -2,73                  | -40,16               |
|                          |                 | 1                 | 130,31                | 16,70                | 25,72                 | 0,03                 | 4,46                   | -8,32                |
|                          |                 | 1/2               | 126,20                | 5,64                 | 51,44                 | 0,05                 | 18,35                  | -1,37                |
| (51)                     | 2               | 205,64            | 57,19                 | 15,31                | 0,02                  | -2,80                | -39,94                 |                      |
|                          | 1               | 141,89            | 16,90                 | 30,62                | 0,03                  | 5,46                 | -8,23                  |                      |
|                          | 1/2             | 141,98            | 5,78                  | 61,24                | 0,06                  | 23,55                | -1,35                  |                      |
| 60                       | (52)<br>$n = 2$ | 2                 | 256,73                | 77,81                | 14,29                 | 0,01                 | -3,82                  | -54,35               |
|                          |                 | 1                 | 172,69                | 22,89                | 28,58                 | 0,03                 | 1,13                   | -11,17               |
|                          |                 | 1/2               | 159,85                | 7,75                 | 57,16                 | 0,06                 | 12,79                  | -1,80                |
|                          | (52)<br>$n = 3$ | 2                 | 342,88                | 96,95                | 19,29                 | 0,02                 | -4,30                  | -66,91               |
|                          |                 | 1                 | 226,42                | 28,71                | 38,58                 | 0,04                 | 0,74                   | -13,64               |
|                          |                 | 1/2               | 212,32                | 9,82                 | 77,16                 | 0,08                 | 17,01                  | -2,16                |
| (52)<br>$n = 4$          | 2               | 420,37            | 116,32                | 24,50                | 0,02                  | -4,71                | -79,60                 |                      |
|                          | 1               | 280,60            | 34,57                 | 48,99                | 0,05                  | 0,72                 | -16,14                 |                      |
|                          | 1/2             | 265,61            | 11,89                 | 97,88                | 0,10                  | 22,02                | -2,53                  |                      |



| Prędkość $v_0$<br>[km/h] | Krzywa          | Stosunek<br>$L/R$ | $a = 1 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = 0 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = -1 \text{ m/s}^2$ |                      |
|--------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
|                          |                 |                   | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$    | $R = 1000 \text{ m}$ |
|                          |                 |                   |                       |                      |                       |                      |                        |                      |
| 120                      | (49)            | 2                 | 1809,95               | 91,43                | 685,87                | 0,69                 | 228,46                 | -23,39               |
|                          |                 | 1                 | 2291,65               | 37,95                | 1371,74               | 1,37                 | 785,17                 | -1,87                |
|                          |                 | 1/2               | 3570,68               | 21,61                | 2743,48               | 2,74                 | 2082,95                | 0,54                 |
|                          | (50)            | 2                 | 2019,19               | 90,30                | 823,05                | 0,82                 | 293,56                 | -21,99               |
|                          |                 | 1                 | 2639,57               | 38,46                | 1646,09               | 1,65                 | 985,94                 | -1,84                |
|                          |                 | 1/2               | 4193,33               | 22,77                | 3293,18               | 3,29                 | 2557,70                | 0,48                 |
|                          | (51)            | 2                 | 2271,73               | 92,42                | 979,82                | 0,98                 | 376,79                 | -21,57               |
|                          |                 | 1                 | 3043,32               | 40,18                | 1959,63               | 1,96                 | 1220,38                | -1,81                |
|                          |                 | 1/2               | 4907,84               | 24,53                | 3919,26               | 3,92                 | 3102,90                | 0,54                 |
|                          | (52)<br>$n = 2$ | 2                 | 2557,61               | 124,03               | 914,49                | 0,91                 | 204,72                 | -28,86               |
|                          |                 | 1                 | 3189,77               | 52,61                | 1828,99               | 1,83                 | 934,88                 | -2,28                |
|                          |                 | 1/2               | 4889,84               | 30,52                | 3657,98               | 3,66                 | 2659,45                | 0,13                 |
| (52)<br>$n = 3$          | 2               | 3397,05           | 157,05                | 1234,57              | 1,23                  | 272,09               | -34,58                 |                      |
|                          | 1               | 427087            | 67,53                 | 2469,14              | 2,47                  | 1267,40              | -2,60                  |                      |
|                          | 1/2             | 6574,82           | 39,82                 | 4938,27              | 4,94                  | 3601,73              | 0,06                   |                      |
| (52)<br>$n = 4$          | 2               | 4249,69           | 190,22                | 1567,71              | 1,57                  | 352,39               | -40,42                 |                      |
|                          | 1               | 5378,13           | 82,52                 | 3135,41              | 3,14                  | 1626,03              | -2,92                  |                      |
|                          | 1/2             | 8312,06           | 49,17                 | 6270,82s             | 6,27                  | 4596,25              | 0,04                   |                      |

Tablica 4. Wartości całek Q dla wybranych krzywych  
Table 4. The values of integrals Q for selected curves

| Prędkość $v_0$<br>[km/h] | Krzywa          | Stosunek<br>$L/R$ | $a = 1 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = 0 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = -1 \text{ m/s}^2$ |                      |
|--------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
|                          |                 |                   | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$    | $R = 1000 \text{ m}$ |
|                          |                 |                   |                       |                      |                       |                      |                        |                      |
| 60                       | (49)            | 2                 | 2665,51               | 7562,55              | 514,40                | 51,44                | 43,29                  | 5340,33              |
|                          |                 | 1                 | 614,98                | 1103,50              | 257,20                | 25,72                | 59,42                  | 547,94               |
|                          |                 | 1/2               | 208,05                | 182,30               | 128,60                | 12,86                | 69,16                  | 43,42                |
|                          | (50)            | 2                 | 2579,54               | 8692,24              | 573,19                | 57,32                | 39,86                  | 6152,56              |
|                          |                 | 1                 | 696,12                | 1266,75              | 286,60                | 28,66                | 61,20                  | 631,83               |
|                          |                 | 1/2               | 234,17                | 208,77               | 143,30                | 14,33                | 75,44                  | 50,04                |
|                          | (51)            | 2                 | 2732,12               | 9214,56              | 604,59                | 60,46                | 38,52                  | 6520,96              |
|                          |                 | 1                 | 736,59                | 1342,84              | 302,30                | 30,23                | 63,19                  | 669,44               |
|                          |                 | 1/2               | 247,52                | 221,28               | 151,15                | 15,11                | 79,17                  | 52,93                |
|                          | (52)<br>$n = 2$ | 2                 | 1506,53               | 5343,03              | 308,64                | 30,86                | 25,04                  | 3861,55              |
|                          |                 | 1                 | 396,65                | 772,05               | 154,32                | 15,43                | 26,28                  | 401,68               |
|                          |                 | 1/2               | 130,60                | 125,44               | 77,16                 | 7,72                 | 38,01                  | 32,85                |
| (52)<br>$n = 3$          | 2               | 1131,57           | 4133,16               | 220,46               | 22,05                 | 20,46                | 3022,05                |                      |
|                          | 1               | 293,56            | 594,36                | 110,23               | 11,02                 | 15,78                | 316,58                 |                      |
|                          | 1/2             | 95,39             | 95,79                 | 55,11                | 5,51                  | 25,95                | 26,34                  |                      |
| (52)<br>$n = 4$          | 2               | 906,82            | 3370,68               | 171,47               | 17,15                 | 17,93                | 2481,79                |                      |
|                          | 1               | 233,21            | 483,32                | 85,73                | 8,57                  | 10,99                | 261,10                 |                      |
|                          | 1/2             | 75,19             | 77,72                 | 42,87                | 4,29                  | 19,63                | 21,96                  |                      |

| Prędkość $v_0$<br>[km/h] | Krzywa          | Stosunek<br>$L/R$ | $a = 1 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = 0 \text{ m/s}^2$ |                      | $a = -1 \text{ m/s}^2$ |                      |
|--------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
|                          |                 |                   | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$   | $R = 1000 \text{ m}$ | $R = 100 \text{ m}$    | $R = 1000 \text{ m}$ |
|                          |                 |                   |                       |                      |                       |                      |                        |                      |
| 120                      | (49)            | 2                 | 13314,90              | 11667,49             | 8230,05               | 823,05               | 4426,01                | 2778,60              |
|                          |                 | 1                 | 5306,34               | 2322,63              | 4115,23               | 411,52               | 3084,11                | 104,41               |
|                          |                 | 1/2               | 2345,39               | 583,54               | 2057,61               | 205,76               | 1789,84                | 27,98                |
|                          | (50)            | 2                 | 14986,95              | 13361,55             | 9171,08               | 917,11               | 4828,22                | 3202,82              |
|                          |                 | 1                 | 5947,44               | 2649,03              | 4585,54               | 458,55               | 3407,76                | 109,35               |
|                          |                 | 1/2               | 2621,74               | 661,82               | 2292,77               | 229,28               | 1986,82                | 26,90                |
|                          | (51)            | 2                 | 15841,39              | 14161,85             | 9673,45               | 965,35               | 5066,98                | 3387,44              |
|                          |                 | 1                 | 6281,12               | 2806,39              | 4836,73               | 483,67               | 3587,52                | 112,78               |
|                          |                 | 1/2               | 2767,26               | 700,53               | 2418,36               | 241,84               | 2093,86                | 27,13                |
|                          | (52)<br>$n = 2$ | 2                 | 8358,38               | 8028,22              | 4938,27               | 493,83               | 2432,45                | 2102,29              |
|                          |                 | 1                 | 3267,02               | 1559,08              | 2469,14               | 246,91               | 1785,54                | 77,60                |
|                          |                 | 1/2               | 1426,90               | 380,07               | 1234,57               | 123,46               | 1056,53                | 9,70                 |
| (52)<br>$n = 3$          | 2               | 6105,11           | 6130,51               | 3527,34              | 352,73                | 1660,67              | 1686,07                |                      |
|                          | 1               | 2363,67           | 1176,37               | 1763,67              | 176,37                | 1252,56              | 65,26                  |                      |
|                          | 1/2             | 1026,28           | 282,63                | 881,83               | 88,18                 | 748,50               | 4,85                   |                      |
| (52)<br>$n = 4$          | 2               | 4812,17           | 4961,22               | 2743,48              | 274,35                | 1256,62              | 1405,66                |                      |
|                          | 1               | 1852,55           | 945,26                | 1371,74              | 137,17                | 963,66               | 56,37                  |                      |
|                          | 1/2             | 801,53            | 225,15                | 685,87               | 68,59                 | 579,31               | 2,93                   |                      |

## 5. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Zawsze, jeśli to jest istotne z punktu widzenia warunków dynamiki ruchu, powinny być stosowane takie elementy geometryczne, które najpełniej tym warunkom odpowiadają. Proponowane kryteria mogą być pomocne w praktyce projektowej przy wyborze odpowiednich krzywych przejściowych w sytuacjach, gdyby zachodziła potrzeba uwzględnienia uwarunkowań, mających związek z warunkami dynamiki ruchu. Praktycznie, wymagałoby to wyznaczenia wchodzących w grę wskaźników porównawczych dla konkretnego zestawu danych projektowych.

Należy przy tym zaznaczyć, że proponowane kryteria doboru krzywych przejściowych należałoby traktować jako miarodajne jedynie w odniesieniu do danej klasy krzywych. Jak wiadomo, odrębną klasę stanowią krzywe z gładkim wykresem krzywizny, które cechuje nie tylko ciągła zmiana krzywizny, lecz także ciągłość zmian przyrostów krzywizny na całej długości krzywej. Jest to istotne przy dużych prędkościach ruchu po łukach o relatywnie małych promieniach. Z tego powodu, w praktyce projektowej zasadne jest odrębne rozpatrywanie krzywych należących do różnych klas rozwiązań.

Dlatego też zestawienia tabelaryczne, przytoczone w niniejszej pracy, mają charakter orientacyjny. Pokazują one, że w wielu przypadkach najkorzystniejszą krzywą jest klotoida. Dające się odnotować odstępstwa od tego trendu nakazują jednak, aby tego spostrzeżenia nie uogólniać i w doborze najkorzystniejszej krzywej każdorazowo uwzględniać jak najszerszy zbiór wchodzących w grę rozwiązań. Przeprowadzenie odpowiednich obliczeń dla branych pod uwagę krzywych nie stwarza obecnie żadnych problemów z uwagi na powszechność stosowania techniki komputerowej w procesie projektowania.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] *Koc W.*: Krzywe przejściowe z nieliniowymi rampami przechyłkowymi w warunkach eksploatacyjnych PKP. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe nr 47, Gdańsk 1990
- [2] *Bałuch H.*: Optymalizacja układów geometrycznych toru. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1983
- [3] *Elfimov O.V.*: Teoria pieriechodnych krivych. Moskwa 1948
- [4] *Lorenz H.*: Trassierung und Gestaltung von Straßen und Autobahnen. Bauverlag GmbH, Wiesbaden-Berlin 1971
- [5] *Grabowski R.J.*: Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja nr 82, Kraków 1984

- [6] *Kobryń A.*: Koncepcja dynamicznego kryterium doboru krzywoliniowych elementów geometrycznych tras komunikacyjnych. Projekt badawczy KBN nr 9T12E 029 19. Białystok 2001 (raport nie publikowany)
- [7] *Bloss A.E.*: Der Übergangsbogen mit geschwungener Überhöhungsrampe. Ogran für Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge **73**, 15/1936
- [8] *Göldner K.*: Zur Frage der Kurvenüberleitung bei Autostraßen. Straße und Autobahn, Heft 12, Bonn 1961
- [9] *Grabowki R.J.*: Optymalizacja krzywych przejściowych przystosowanych do dużych prędkości. Drogownictwo 3/1973
- [10] *Leyko J.*: Mechanika ogólna. Tom 1, 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996

## **SELECTION OF THE TRANSITION CURVE ON THE BASIS OF DYNAMIC CRITERIA OF DRIVING**

### **Abstract**

The paper concerns the criteria of the selection of transition curves, connected with the dynamic conditions of driving. If the use of long transition curves is not possible, it is appropriate to use such transition curves, which are characterized by the optimal curvature distribution in the sense dynamic conditions of driving. A question of the optimal curvature distribution seems to be opened. It can be dependent on the needs or possible restrictions of the design process of curvilinear route sections. For selection of transition curves the minimization of sum of the values of fleeing acceleration or sum of the momentary changes of this acceleration is suggested. The appropriate equations are provided enables a possibility for analytic or numeric computations. The suggested criteria were examined in respect to selected transition curves.

