



IZABELA MARCZEWSKA¹⁾
WŁODZIMIERZ SOSNOWSKI²⁾

PROJEKTOWANIE OGÓLNEGO KSZTAŁTU MOSTU PRZY UŻYCIU METOD OPTYMALIZACJI TOPOLOGICZNEJ

STRESZCZENIE. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie metody projektowania wstępnego kształtu konstrukcji mostowej drogą optymalizacji topologicznej. Metoda ta jest obecnie bardzo szeroko wykorzystywana w wielu gałęziach przemysłu, m. in. samochodowego i lotniczego. Przedstawiamy możliwości wykorzystania tej metody na etapie określania koncepcji mostu.

W proponowanym sformułowaniu poszukiwany jest optymalny rozkład gęstości "sztucznego" materiału zastępczego nazywanego Prosty Izotropowym Materiałem z Prawem Potęgowym (ang. *Simple Isotropic Material with Penalization*) [1] rozmieszczonego w obszarze projektowym, przy zdefiniowanym obciążeniu i warunkach brzegowych. Wyściowy obszar projektowy stanowią tarcze sprężyste pracujące w płaskim stanie naprężenia i wypełnione materiałem zastępczym. W wyniku optymalizacji topologicznej materiał zastępczy jest rozrzedzany w obszarach mało wyężonych i zagęszczany w obszarach wymagających wzmocnienia. Obszary zagęszczenia materiału tworzą kształt optymalny.

Algorytmy analizy i optymalizacji topologicznej są realizowane przy użyciu metody elementów skończonych i heurystycznych metod optymalizacji topologicznej. Proponowane podejście pozwala uzyskać kształt konstrukcji mostowej o dowolnych, wstępnie założonych wymiarach zewnętrznych.

¹⁾ dr inż. – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

²⁾ doc. dr hab. inż. – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

1. WPROWADZENIE

Zazwyczaj wstępny projekt mostu tworzony jest na podstawie określonych wymogów dotyczących wytrzymałości, funkcjonalności czy estetyki. Znając ogólne wymiary konstrukcji mostowej oraz rodzaj i wielkość obciążenia opracowuje się koncepcję mostu korzystając z doświadczenia i intuicji projektanta. Dalsza optymalizacja konstrukcji polega na poprawianiu już istniejącego projektu. Można modyfikować dowolne parametry projektowe, w tym parametry kształtu, ale trzeba pogodzić się z faktem, że podstawowa konfiguracja jest z góry zadana przez projektanta i nie może być zasadniczo zmieniana. Wady tej nie posiada optymalizacja topologiczna. Pozwala ona łatwo określić wiele początkowych konfiguracji konstrukcji mostowych. Należy jedynie podać ogólne wymiary mostu, schemat podparcia i obciążenia a procedura sama określa optymalny kształt konstrukcji.

Zadanie optymalizacji topologicznej polega na odpowiednim zaprojektowaniu gęstości lub sztywności materiału zastępczego znajdującego się w obszarze projektowym. Materiał zastępczy nazywany jest Prostym Izotropowym Materiałem z Prawem Potęgowym [1] (ang. *Simply Isotropic Material with Penalization*).

W procesie optymalizacji topologicznej materiał zastępczy jest zagęszczany w obszarach wymagających usztywnienia. Materiał przemieszcza się tworząc często zupełnie nowy układ, np. wyniku optymalizacji topologicznej tarcz uzyskujemy układy przypominające układy kratowe, których pasy górne lub dolne, w zależności od projektu, stanowią łuki. Ostatecznie, przy założonej ilości materiału, uzyskujemy najbardziej sztywną konstrukcję. Z bryły o określonych wymiarach kształtowany jest nowy układ mogący stanowić podstawę opracowywanej koncepcji konstrukcji.

W niniejszej pracy zajmiemy się możliwością wykorzystania optymalizacji topologicznej przy tworzeniu ogólnego kształtu mostu. Proponujemy, aby powyższą metodę projektowania stosować do określania ogólnego kształtu nietypowych konstrukcji mostowych. Należy podkreślić, że otrzymany kształt konstrukcji nie jest gotowym projektem mostu a jedynie propozycją jednej z rozważanych koncepcji.

Oparta na ścisłych metodach analizy wrażliwości, optymalizacja topologiczna jest nowoczesną, interdyscyplinarną dziedziną badań naukowych służącą bezpośrednio zastosowaniom praktycznym. Analiza wrażliwości rozwijana jest od około 25 lat, historię rozwoju tej grupy metod numerycznych zawierają podręczniki [2], [3].

Optymalizacja topologiczna liczy sobie zaledwie kilkanaście lat, pierwsze prace ukazały się w latach osiemdziesiątych, przegląd literatury można znaleźć w monografii [1]. Większość prac prezentowanych na tegorocznym, światowym kongresie poświęconym optymalizacji (5-th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lido di Jesolo, Wenecja, 2003) dotyczyła tej właśnie tematyki [4], [5]. Efektywność omawianych metod numerycznych wynika z możliwości metody elementów skończonych stanowiącej podstawę omawianych algorytmów [6]. Przedstawiona metoda optymalizacji ma charakter bardzo ogólny. Może być stosowana do rozwiązywania bardzo skomplikowanych zadań.

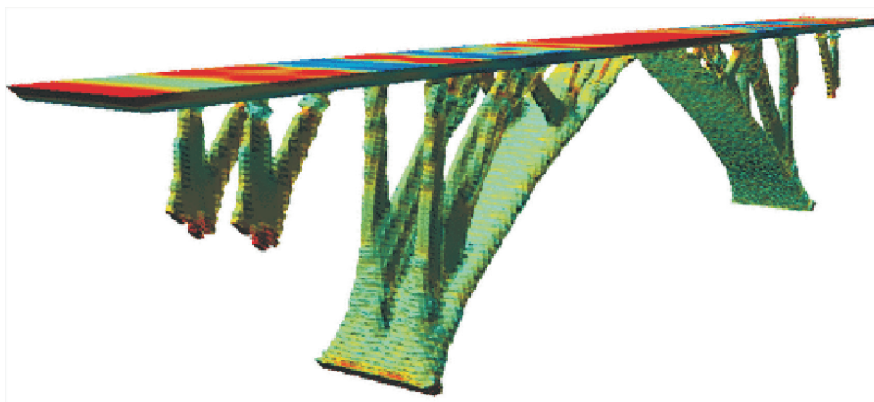
W artykule został zaprezentowany algorytm numeryczny realizujący proces optymalizacji topologicznej. Podstawową zaletą przedstawionego algorytmu jest jego niski koszt numeryczny. Dzięki temu możemy w bardzo krótkim czasie (na przykład kilkunastu minut) uzyskać wiele rozwiązań, które mogą znacznie wzbogacić proces opracowywania koncepcji. Jedno rozwiązanie wymaga zaledwie kilkunastu sekund obliczeń na komputerze klasy PC.

Algorytm optymalizacji topologicznej zaprezentowany w pracy ma charakter heurystyczny. Taki algorytm jest zależny od pewnych parametrów, które należy określić drogą testów numerycznych. Istnieje wiele opracowań [8], w których podane są wartości powyższych parametrów.

Układy uzyskane drogą optymalizacji topologicznej cechują się maksymalną sztywnością, przy założonej ilości materiału. Fakt ten ma zasadniczy wpływ na całkowity koszt realizacji konstrukcji. Jest oczywiste, że ze względów ekonomicznych, preferowane są konstrukcje wymagające mniejszego zużycia materiału.

Celem optymalizacji topologicznej może być również określenie optymalnej ilości materiału z jakiego zostanie wykonany układ. W takim przypadku należy wprowadzić dodatkowe kryteria typu przemieszczeniowego i naprężeniowego. To drugie podejście nie jest jednak tematem niniejszej pracy i zostało w niej jedynie zasygnalizowane.

Zamieszczone w pracy ogólne kształty mostów, uzyskane na drodze optymalizacji topologicznej są podobne do kształtów istniejących mostów, co potwierdza przydatność metody do wykorzystywania jako narzędzie wspomagające twórczy proces tworzenia koncepcji mostu. Na rysunku 1 przedstawiono przykład koncepcji mostu uzyskanej metodą optymalizacji topologicznej dostępny pod adresem: http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/homog_en.html.



Rys.1. Ogólny kształt mostu uzyskany drogą optymalizacji topologicznej
http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/homog_en.html

Fig.1. Topology optimization of the bridge
http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/homog_en.html

2. PROSTY IZOTROPOWY MATERIAŁ Z PRAWEM POTĘGOWYM

Zastosowany w pracy materiał jest materiałem sztucznym o zmiennej gęstości $0 < \rho < \rho_o$, gdzie ρ_o jest gęstością rzeczywistego materiału litego. Na początku procesu optymalizacji materiał lity jest równomiernie rozmieszczony w obszarze projektowym i posiada wyjściową “sztuczną” gęstość $\rho < \rho_o$. W obszarach wymagających usztywnienia materiał zagęszcza się do postaci litej i wówczas jego gęstość jest równa $\rho = \rho_o$. W pozostałych obszarach materiał jest usuwany ($\rho \rightarrow 0$) lub pozostaje nadal rozrzedzony, ($\rho < \rho_o$). Obszar projektowy jest podzielony na elementy skończone. Gęstość materiału zastępczego w elemencie obszaru projektowego Ω wyraża się wzorem

$$\rho = \zeta_e \rho_o, \quad (1)$$

gdzie ζ_e jest zmienną decyzyjną w zadaniu optymalizacji topologicznej i oznacza miarę gęstości materiału zastępczego. Dla płaskiego stanu naprężenia sztywność elementu z materiałem zastępczym dana jest wzorem, wg [1],

$$\mathbf{D}_e = \zeta_e^p \mathbf{D}_o, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{D}_o$ jest macierzą stałych materiałowych dla materiału litego i przyjmuje postać

$$\mathbf{D}_o = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

E i ν są odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona. Dla materiału izotropowego z prawem potęgowym wykładnik p musi spełniać nierówność, wg [8],

$$\begin{aligned} p &\geq \max\left(\frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu}\right), & \text{dla } 2D \\ p &\geq \max\left(15\frac{1-\nu}{7-5\nu}, \frac{3}{2}\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right), & \text{dla } 3D \end{aligned} \quad (4)$$

Dla tak dobranych wartości p punkty krzywych wyrażających zależność pomiędzy sztywnością a miarą gęstości materiału dla materiału sztucznego pokrywają się z punktami Hashina-Shtrikmana dla kompozytu zbudowanego z dwóch materiałów o

różnych własnościach materiałowych, [8]. W pracy rozważane są układy tarczowe 2D o współczynniku Poissona $\nu=1/3$. Stąd ze wzoru (4) wynika iż $p \geq 3$. Wielkość wykładnika p może być dobierana także na podstawie testów z przedziału $1 < p < 9$, [7]. Im wyższe wartości p tym rozwiązanie zawiera mniej stref z materiałem o gęstościach pośrednich, które trzeba byłoby wyeliminować. Sposoby eliminacji takich stref są opisane np. w pracy [7], [8]. Zgodnie ze wzorem (4) w pracy przyjęto $p = 3$.

W zadaniu optymalizacji topologicznej poszukiwany jest optymalny rozkład fikcyjnego materiału zastępczego wypełniającego obszar projektowy. Na tym etapie projektowania, który jak już mówiliśmy dotyczy koncepcji (architektury) mostu, nie jest istotne jaki to materiał: beton, stal czy kompozyt polimerowy.

3. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI TOPOLOGICZNEJ

Zadanie określania optymalnej gęstości materiału zastępczego w obszarze projektowym, ze względu na minimalną globalną podatność c układu można zapisać w następujący sposób, wg [9]: znajdź

$$\min_{\zeta_e} c = \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \left(\int_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA \right) \mathbf{q}_e, \quad (5)$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

$$\sum_{e=1}^N \zeta_e v_e - f \sum_{e=1}^N v_e = 0, \quad (7)$$

$$\zeta_e^{\min} \leq \zeta_e \leq 1,0, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{q}_e$ jest wektorem przemieszczeń węzłowych e-tego elementu, A_e jest polem elementu tarczy, $\mathbf{B}_e$ jest macierzą pochodnych funkcji kształtu. Równanie (6) jest równaniem równowagi układu, $\mathbf{q}$ jest globalnym wektorem przemieszczeń węzłów konstrukcji, $\mathbf{K}$ i $\mathbf{F}$ są odpowiednio globalną macierzą sztywności i wektorem sił zewnętrznych, v_e jest objętością elementu dyskretyzacji. Wyrażenie (7) jest równaniem stałej ilości materiału w całym obszarze Ω . Pierwszy człon wyrażenia (7) oznacza objętość materiału zastępczego, zaś drugi jest objętością obszaru projektowego pomnożoną przez stałą f . Stała ta określa stopień początkowego rozrzedzenia materiału

litego w obszarze projektowym Ω . Jeśli objętość materiału litego jest o połowę mniejsza od objętości obszaru projektowego to wówczas $f=0,5$. Wyrażenie (8) określa zakres zmienności miary gęstości materiału zastępczego. Gdy ζ_e przyjmuje wartość 1,0 wówczas element jest całkowicie wypełniony materiałem litym. Obszary, w których $\zeta_e = \zeta_e^{\min}$ uważane są za puste. Ze względów numerycznych przyjmuje się, że dolne ograniczenie $\zeta_e^{\min}$ powinno być dobrane tak, aby nie było mniejsze niż dopuszczalny poziom dokładności arytmetyki komputera. W naszym przypadku przyjęto $\zeta_e^{\min} = 0,1e-07$.

Istnieje także możliwość optymalizacji topologicznej układu z jednoczesnym uwzględnieniem optymalizacji ilości materiału poprzez dobór odpowiedniej wielkości parametru f . W tak postawionym problemie będziemy mieli dwie funkcje celu. Pierwszą funkcją celu będzie ilość materiału, z którego będzie wykonany układ, która zależy od wielkości parametru f . Drugą funkcją celu, tak jak w poprzednim sformułowaniu, będzie minimalna podatność, której wartości w poszczególnych krokach iteracyjnych zależą od odpowiednio rozmieszczanego materiału. Naturalnym jest, że jeżeli nie wprowadzimy dodatkowych ograniczeń to przy projektowaniu na podstawie kryterium maksymalnej sztywności wymiary elementów układu będą dążyły do nieskończoności. Aby uniknąć takich rozwiązań należy zdefiniować dodatkowe warunki w postaci ograniczeń typu naprężeniowego i przemieszczeniowego. Wówczas sformułowanie zadania optymalizacji ogólnego kształtu maksymalnie sztywnej i lekkiej konstrukcji może być podane następująco: znajdź

$$\min_f \left(\min_{\zeta_e} c = \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \left(\int_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA \right) \mathbf{q}_e \right), \quad (9)$$

przy ograniczeniach (6), (7), (8) oraz dodatkowych ograniczeniach:
typu naprężeniowego

$$\sigma_i \leq \sigma_i^{dop}, \quad i=1, \dots, n_\sigma, \quad (10)$$

typu przemieszczeniowego

$$u_i \leq u_i^{dop}, \quad i=1, \dots, n_u, \quad (11)$$

gdzie $\sigma_i, u_i, \sigma_i^{dop}, u_i^{dop}$ są odpowiednio naprężeniem i przemieszczeniem w i -tym elemencie oraz i -tym węźle układu. $\sigma_i^{dop}, u_i^{dop}$ są odpowiednio naprężeniem i przemieszczeniem dopuszczalnym w i -tym elemencie oraz i -tym węźle układu. n_σ, n_u oznaczają liczbę ograniczeń typu naprężeniowego i przemieszczeniowego. Niniejsze

podejście nie jest jednak tematem pracy i zostało jedynie zasygnalizowane. W pracy wykorzystywane jest natomiast sformułowanie podane wzorami (5)-(8).

Optymalizacja topologiczna może być stosowana także między innymi do projektowania ogólnego kształtu układów drgających. Przykłady innych zastosowań omawianej metody można znaleźć w bardzo wielu pracach, niektóre z nich są omawiane w [7] i [8].

4. KRYTERIA OPTYMALNOŚCI

Rozwiązanie zadania minimalizacji globalnej podatności przy ograniczeniach danych wzorami (6)-(8) może być uzyskane drogą określenia punktu stacjonarnego funkcji Lagrange'a określanego z warunków optymalności Kuhna-Tuckera. Funkcja Lagrange'a dla zadania (5)-(8) przyjmuje postać [9]

$$L = \sum_{e=1}^N \zeta_e^p \mathbf{q}_e^T \mathbf{k}_e^o \mathbf{q}_e + \Gamma^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}) + \lambda \left(\sum_{e=1}^N \zeta_e v_e - f \sum_{e=1}^N v_e \right) + \sum_{e=1}^N \xi_e^d (\zeta_e^{\min} - \zeta_e) + \sum_{e=1}^N \xi_e^g (\zeta_e - 1, 0) , \quad (12)$$

gdzie $\mathbf{k}_e^o = \int_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_o \mathbf{B}_e dA$ jest macierzą sztywności elementu z materiałem litym. Γ i λ

są mnożnikami Lagrange'a stojącymi przy ograniczeniach typu równościowego, zaś ξ_e^d i ξ_e^g są mnożnikami Lagrange'a stojącymi przy ograniczeniach typu nierównościowego. Warunki optymalności Kuhna-Tuckera wyrażone są zależnościami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \zeta_e} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \Gamma} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_e^d} &\leq 0, & \xi_e^d &\geq 0, & \frac{\partial L}{\partial \xi_e^d} \xi_e^d &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_e^g} &\leq 0, & \xi_e^g &\geq 0, & \frac{\partial L}{\partial \xi_e^g} \xi_e^g &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

W prezentowanej pracy problem optymalizacji topologicznej był rozwiązywany przy użyciu metod kryteriów optymalności. W metodach tych na każdym kroku iteracyjnym określany jest zbiór ograniczeń aktywnych. Jeśli znamy strefy gdzie ograniczenia nierównościowe są nieaktywne to możemy w nich posługiwać się równościowymi warunkami stacjonarności funkcji Lagrange'a. W strefach gdzie ograniczenia są aktywne posługujemy się nierównościowymi warunkami Kuhna-Tuckera.

Dla pośrednich wartości zmiennych decyzyjnych $\zeta_e^{\min} < \zeta_e < 1,0$ ograniczenia nierównościowe (8) stają się nieaktywne. Uwzględniając zależność (12) kryterium optymalności dla pośrednich wartości miar gęstości materiału można zapisać w postaci

$$-\frac{p\zeta_e^{(p-1)}\mathbf{q}_e^T\mathbf{k}_e^o\mathbf{q}_e}{\lambda v_e} = 1,0, \quad (14)$$

gdzie $\mathbf{k}_e^o$ jest macierzą sztywności elementu z litym materiałem rzeczywistym o gęstości ρ_o . Wprowadzając oznaczenie

$$Q_e = -\frac{p\zeta_e^{(p-1)}\mathbf{q}_e^T\mathbf{k}_e^o\mathbf{q}_e}{\lambda v_e}, \quad (15)$$

wyrażenie (15) możemy zapisać w postaci $Q_e = 1,0$. Interpretacja fizyczna wyrażenia (15) jest następująca: gęstość pochodnej podatności z miarą $\frac{1}{\lambda}$ jest równa jeden w każdym elemencie obszaru dla pośrednich miar gęstości materiału ζ_e . Gdy spełniony jest warunek (15) dla pośrednich miar gęstości $\zeta_e^{\min} < \zeta_e < 1,0$ rozwiązanie uważane jest za optymalne.

Gdy dolne ograniczenie staje się aktywne $\zeta_e^{\min} - \zeta_e = 0$ i $\xi_e^d \geq 0$ kryterium optymalności przyjmuje postać

$$Q_e = 1 - \frac{\xi_e^d}{\lambda v_e} \leq 1, \quad (16)$$

Dla górnego ograniczenia aktywnego $\zeta_e - 1 = 0$, $\xi_e^g \geq 0$ a kryterium optymalności przyjmuje postać

$$Q_e = 1 + \frac{\xi_e^g}{\lambda v_e} \geq 1. \quad (17)$$

Wykorzystując powyższe związki Bendsøe [1] zaproponował następujący schemat uaktualniania zmiennych

$$\zeta_e^{k+1} = \begin{cases} \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) & \text{gdy } Q_e^\eta \zeta_e^k \leq \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) \\ Q_e^\eta \zeta_e^k & \text{gdy } \min(1, (\zeta_e + m)) < Q_e^\eta \zeta_e^k < \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) \\ \min(1, (\zeta_e + m)) & \text{gdy } \min(1, (\zeta_e + m)) \leq Q_e^\eta \zeta_e^k \end{cases} \quad (18)$$

gdzie η jest parametrem tłumienia, m długością kroku. Mnożniki Lagrange'a Γ i λ są wyznaczone z warunków $\frac{\partial L}{\partial \Gamma} = 0$ oraz $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$.

Wprowadzenie parametru tłumienia ma na celu przybliżanie wartości Q_e , uzyskanej w danej iteracji, do jedynki. Wówczas rozwiązanie spełnia kryterium optymalności (14). Przyjmując $\eta = 1/2$ zbliżamy się z wartościami Q_e do jedności, np. $\sqrt{1,1} = 1,0488$, zaś $\sqrt{0,990} = 0,995$. Długość kroku m określa o ile na danej iteracji może wzrosnąć lub zmaleć wartość miary gęstości materiału. W pracy miara ta jest dobrana jako $\frac{1}{50} x_e^{\max} = 0,02$. Wprowadzenie powyższych parametrów wiąże się z heurystycznym typem algorytmu optymalizacji topologicznej.

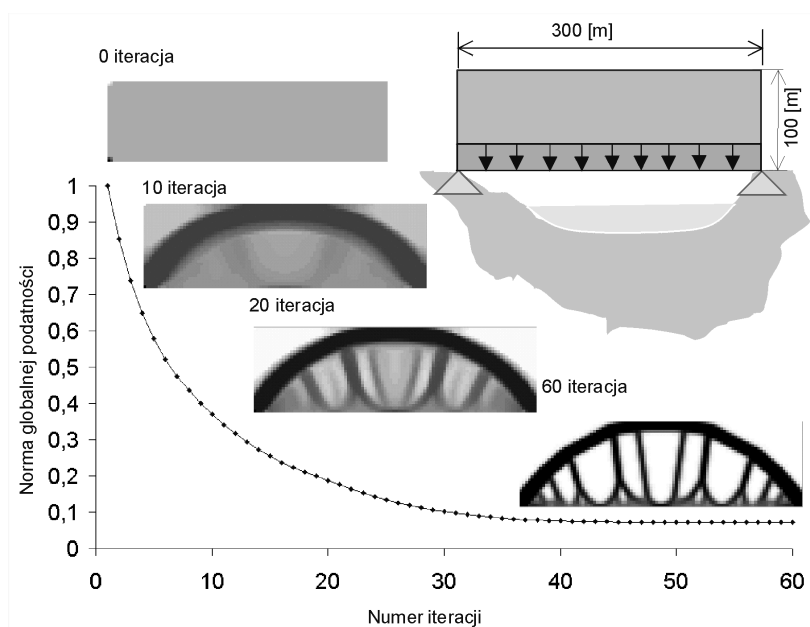
5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

5.1. PRZYKŁAD 1

Założmy, że chcemy zaprojektować most dla samochodów z jazdą dołem nad płytą rzeką o płaskich brzegach, wg schematu przedstawionego na rysunku 2.

Rozważając wstępną koncepcję mostu należy zwrócić uwagę na warunki podparcia. Na tym etapie projektu nie zachodzi potrzeba zastosowania takiego samego sposobu podparcia dla obszaru projektowego jak dla uzyskanego mostu. Specyfika zadania wymaga wprowadzenia podpór nieprzesuwnych dla obszaru projektowego. W projekcie wstępnym opracowywanym przy użyciu optymalizacji topologicznej podpory powinny znajdować się w miejscach gdzie przewiduje się usytuowanie przyczółków lub filarów między przęsłowych. Przy dalszych obliczeniach projektu należy wprowadzić inne warunki, np. takie, które zapewniają konstrukcji statyczną wyznaczalność.

W przedstawionym podejściu obszarem projektowym są tarcze sprężyste. Długość tarczy wynika z rozstawu podpór, wysokość jest określona przez projektanta dowolnie. Rozkład gęstości materiału uzyskany drogą optymalizacji topologicznej dla takich układów nie zależy od wartości obciążenia istotny jest natomiast jego rozkład. W miejscu gdzie będzie znajdował się pas jezdny należy wprowadzić obciążenie ciągłe. Podobnie, na rozkład gęstości materiału nie mają wpływu jego własności sprężyste, takie jak moduł Younga. W pracy przeprowadzone są obliczenia przy założeniu, że moduł Younga jest równy 210 GPa co odpowiada stali konstrukcyjnej. Należy podkreślić, że taki sam kształt mostu uzyskalibyśmy przyjmując $E=1$ N. Oczywiście wartości obciążenia i stałe materiałowe wpływają na odpowiedź układu lecz mają znaczenie dopiero na etapie wymiarowania konstrukcji. Wtedy bowiem przeprowadzana jest dokładna analiza wytrzymałości i optymalizacja wymiarów w kolejnych fazach projektowania. Problematyka ta wychodzi jednak poza zakres niniejszej pracy.



Rys.2. Ścieżka optymalizacji topologicznej i rozmieszczenie materiału tarczy w płaskim stanie naprężenia obciążonej równomiernie wzdłuż dolnej krawędzi, podpartej w dwóch narożnych węzłach

Fig.2. Topology optimization - iteration path and the material distribution in plain stress slab subjected to in-plane, distributed load, supported at two corners' nodes

Wobec powyższych założeń przyjmujemy, że obszar projektowy stanowi tarcza nieprzesuwnie zamocowana w narożach i równomiernie obciążona wzdłuż dolnej krawędzi tak jak to pokazano na rysunku 2. Do rozwiązania zadania statyki przyjęto obciążenie o intensywności $q = 1000 \text{ kN/m}$ oraz następujące dane materiałowe: $E = 210 \text{ GPa}$ oraz $\nu = 0,3$. Obszar projektowy podzielono na 3000 prostokątnych, trójkątnych, czworokątnych elementów skończonych.

W zadaniu optymalizacji topologicznej przyjęto: $p = 3$, $\eta = 0,5$, $m = 0,02$, $f = 0,5$, $\zeta_e^{\min} = 0,1 \text{e-}07$.

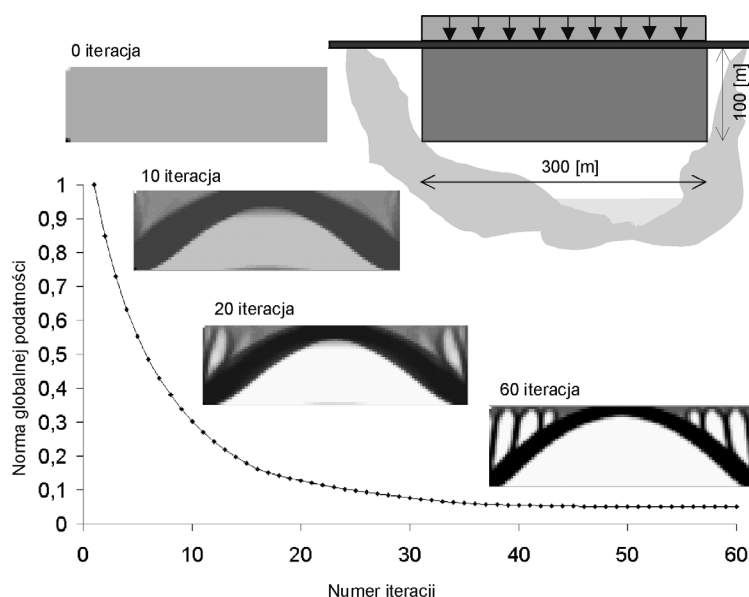
Optymalny kształt konstrukcji oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 2. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 60-tym kroku iteracyjnym. Stwierdzono około 70 procentowy spadek wartości globalnej podatności (równoważny 70 procentowemu wzrostowi sztywności) w stosunku do stanu początkowego.

W wyniku optymalizacji topologicznej przemieszczony w obszarze projektowym materiał tworzy układ przypominający most podwieszony. Pas nośny stanowi łuk do którego za pomocą cięgien jest przymocowany pomost.

5.2. PRZYKŁAD 2

Należy zaprojektować most dla samochodów z jazdą górą nad rzeką o bardzo stromych brzegach, którą pływają statki. Przyjęto, że schemat zastępczy stanowi tarcza nieprzesuwnie zamocowana w narożach i równomiernie obciążona wzdłuż górnej krawędzi, tak jak to pokazano na rysunku 3. Dane do analizy układu i rozwiązania zadania optymalizacji topologicznej przyjęto takie same jak w poprzednim przykładzie.

Optymalny kształt tarczy oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 3. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 60-tym kroku iteracyjnym. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 90 % w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego.



Rys.3. Ścieżka optymalizacji topologicznej i rozmieszczenie materiału tarczy w płaskim stanie naprężenia obciążonej równomiernie wzdłuż górnej krawędzi, podpartej w dwóch narożnych węzłach

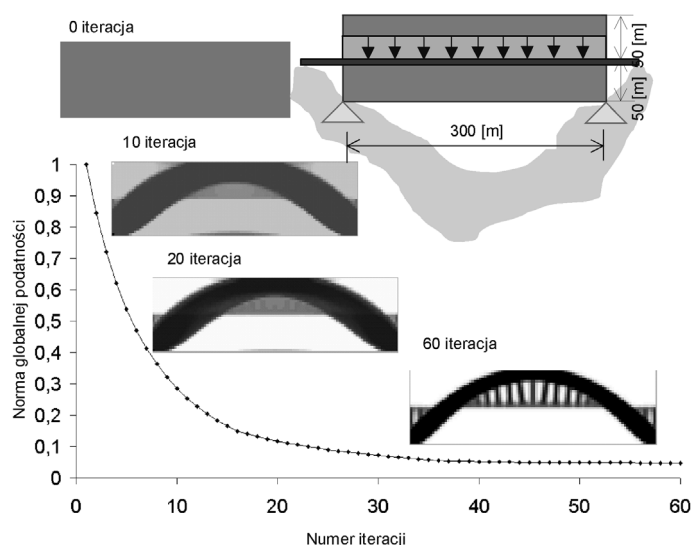
Fig.3. Topology optimization - iteration path and the material distribution in plain stress slab subjected to in-plane, distributed load, supported at two corners' nodes

W wyniku optymalizacji topologicznej materiał przemieszcza się w obszarze projektowym tworząc układ przypominający kratownicę z pasem dolnym w kształcie łuku i prostym pasem górnym. Oddziaływanie zewnętrzne przenoszone przez pas górny jest przekazywane do pasa dolnego poprzez słupy.

5.3. PRZYKŁAD 3

Niniejszy przykład pokazuje jak tworzy się optymalny kształt mostu z pomostem w środku wysokości obszaru projektowego. W przypadku tym obciążenie przyłożone jest w połowie wysokości tarczy zamocowanej nieprzesuwnie tak jak to pokazano na rysunku 4. Pozostałe dane do analizy układu i rozwiązania zadania optymalizacji topologicznej przyjęto takie same jak w poprzednich przykładach.

Optymalny kształt tarczy oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawiono na rysunku 4. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 60-tym kroku iteracyjnym. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 90 % w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego.



Rys.4. Ścieżka optymalizacji topologicznej i rozmieszczenie materiału tarczy w płaskim stanie naprężenia obciążonej równomiernie w środku wysokości, podpartej w dwóch narożnych węzłach

Fig.4. Topology optimization - iteration path and the material distribution in plain stress slab subjected to in-plane, distributed load in the middle of the height, supported at two corners' nodes

Uzyskana konstrukcja mostu posiada cechy układu Nielsena, [11], pokazanego na rysunku 5. Konstrukcje nośną uzyskanego układu stanowi łuk, który na środkowym odcinku dźwiga główną płytę mostu poprzez ciągną.



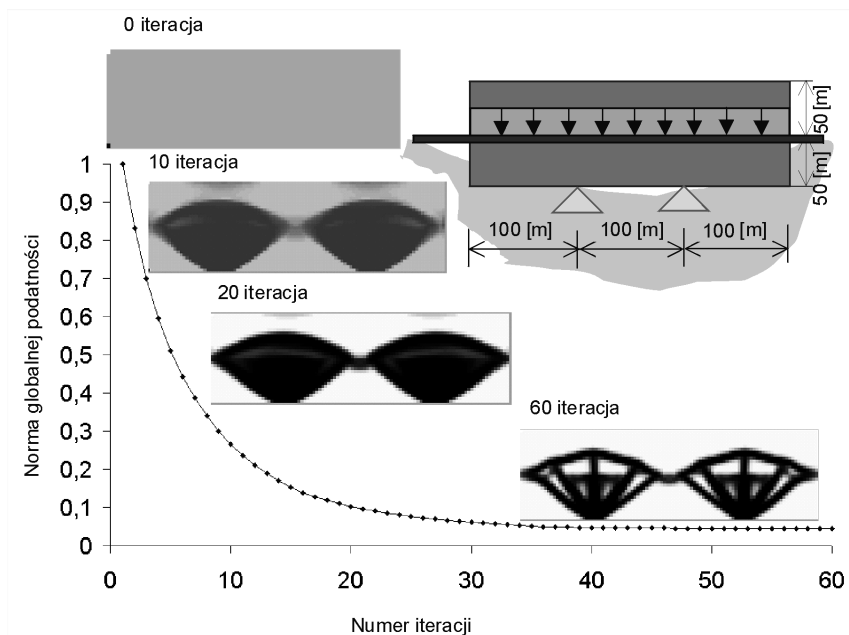
Rys.5. Most Saigo, (<http://www.khi.co.jp/tekkou/catalog/FrameRight6-e.html>). Lokalizacja: Shimane Prefecture, Japonia, długość 270 m, szerokość 6 m, rok oddania 1977

Fig.5. Saigo bridge, (<http://www.khi.co.jp/tekkou/catalog/FrameRight6-e.html>). Location: Shimane Prefecture, Japan, length 270 m, width 6 m, date of completion 1977

5.4. PRZYKŁAD 4

Niniejszy przykład pokazuje jak tworzy się optymalny kształt mostu z pomostem w środku wysokości obszaru projektowego przy wprowadzeniu dwóch podpór nieprzesuwnych. W przypadku tym, tak jak w poprzednim przykładzie, obciążenie przyłożone jest w połowie wysokości tarczy (rys. 6). Pozostałe dane do analizy układu i rozwiązania zadania optymalizacji topologicznej przyjęto takie same jak w poprzednich przykładach.

Optymalny kształt tarczy oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawiono na rysunku 6. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 60-tym kroku iteracyjnym. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 90 % w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego. Uzyskana konstrukcja mostu stanowi dwuprzęsłowy układ z podwieszonym pomostem.



Rys.6. Ścieżka optymalizacji topologicznej i rozmieszczenie materiału tarczy w płaskim stanie naprężenia obciążonej równomiernie w środku wysokości, podpartej w dwóch węzłach

Fig.6. Topology optimization - iteration path and the material distribution in plain stress slab subjected to in-plane, distributed load in the middle of the height, supported at two nodes

6. PODSUMOWANIE

Optymalizacja topologiczna pozwala ustalić wstępny kształt konstrukcji i może stanowić uzupełnienie warsztatu pracy inżyniera projektanta. Należy jednak podkreślić, że optymalizacja nie zastąpi twórczego myślenia projektanta jego intuicji i doświadczenia. Może natomiast wspomóc i wzbogacić ten proces. Szybkość uzyskiwania rozwiązań pozwala rozważać wiele różnych koncepcji przy stosunkowo małym nakładzie pracy i w krótkim czasie.

Przedstawiona metoda optymalizacji ma charakter bardzo ogólny. Została wprowadzie przetestowana na stosunkowo prostych przykładach ale może być stosowana do rozwiązywania znacznie bardziej skomplikowanych zadań.

Powyższy wniosek mógł być sformułowany przede wszystkim dzięki temu, że algorytmy optymalizacyjne zostały sprzężone z najbardziej uniwersalną metodą numeryczną rozwiązywania zadań inżynierskich, jaką jest metoda elementów skończonych.

Metoda projektowania ogólnego kształtu przy wykorzystaniu optymalizacji topologicznej jest metodą stosunkowo nową. Jednak rozwój tej metody jest niesłychanie dynamiczny.

Prezentowany w pracy problem optymalizacji topologicznej jest sformułowany w taki sposób, że na rozkład materiału w obszarze projektowym nie mają wpływu właściwości materiału i wielkość obciążenia a jedynie wymiary, kształt, warunki podparcia i rozkład obciążenia obszaru projektowego oraz wstępna ilość materiału fikcyjnego. Dlatego przedstawione sformułowanie problemu optymalizacji topologicznej może być jedynie wykorzystywane przy tworzeniu koncepcji konstrukcji. Nie możemy się spodziewać, że uzyskamy od razu gotowy projekt, który spełnia wszystkie kryteria np. wytrzymałościowe. Uzyskamy natomiast informację jak mogłyby być usytuowane elementy przyszłej konstrukcji aby była ona najbardziej sztywna. Nie dostaniemy także informacji na temat wymiarów tych elementów. Możemy jedynie określić, które z nich powinny być krępe a które smukłe. Szczegółowe wymiary są ustalone w dalszych etapach procesu projektowania. Zawarte w pracy rozważania pozostają więc w fazie wstępnego projektu architektonicznego.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Bendsoe M.P.*: Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 271, 1995
- [2] *Kleiber M., Antunez H., Hien T.D., Kowalczyk P.*: Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics. J. Wiley, 406, 1997
- [3] *Sosnowski W.*: Numeryczna symulacja, analiza wrażliwości i optymalizacja procesów deformacji konstrukcji, monografia. Wydawnictwo Akademii Bydgoskiej, 211, 2003
- [4] *Marczewska I.: Sosnowski W., Marczewski A., Bednarek T.*: Topology and Sensitivity-Based Optimization of Stiffened Plates and Shells. World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5), Lido di Jesolo, Wenecja, 2003
- [5] *Sigmund O., Jensen J. S.*: Design of acoustic devices by topology optimization. World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5), Lido di Jesolo, Wenecja, 2003
- [6] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.*: The finite element method : Volume 1 : The basis, Volume 2: Solid mechanics, 5-th Edition. Butterworth-Heinemann, 689, 459, 2000
- [7] *Hassani B., Hinton E.*: Homogenization and Structural Topology Optimization, Theory, Practice and Software. Springer-Verlag London Limited, 268, 1999
- [8] *Bendsoe M.P., Sigmund O.*: Topology optimization, Theory, Methods and Applications. Springer, 370, 2003
- [9] *Marczewska I.*: Wieloetapowa optymalizacja topologii, kształtu i parametrów przekrojowych złożonych konstrukcji zginanych. Praca doktorska, IPPT PAN, 172, 2003

[10] http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/homog_en.html

[11] <http://www.khi.co.jp/tekkou/catalog/FrameRight6-e.html>

GENERAL SHAPE DESIGN OF THE BRIDGE STRUCTURE USING TOPOLOGY OPTIMALIZATION METHODS

Abstract

The paper deals with a new method which can be used in initial design of the bridge constructions, when the fundamental decisions related to the type of the bridge must be considered. Sensitivity based topology optimization is the modern, interdisciplinary design tool, which is used in many practical problems. The numerical topology optimization algorithm consists of two basic steps at each iteration: the first, the analysis of the system is performed and the second, the design variables are updated.

In the problem of topology optimization the optimal redistribution of the artificial, non-real material should be determined in design domain in order to minimize the mean compliance of the structure. This material is called Simple Isotropic Material with Penalization [1].

In optimization process the artificial material with intermediate non real density ρ is re-distributed. It is concentrated in stiffened zones $\rho = \rho_0$. The result of the optimization is the optimal global shape of the construction.

The presented examples demonstrate how quickly and easily one can obtain the optimal global shape of the bridge construction using numerical topology optimization procedure.