

**JACEK SUDYKA**¹⁾

ORCID: 0000-0002-4360-2365

TOMASZ MECHOWSKI²⁾

ORCID: 0000-0001-9366-1489

PRZEMYSŁAW HARASIM³⁾

ORCID: 0000-0002-6922-8527

MIROSLAW GRACZYK⁴⁾

ORCID: 0000-0002-0601-7554

ANDRZEJ MATYSEK⁵⁾

ORCID: 0000-0001-6530-0336

OPTIMISATION OF BELLS3 MODEL COEFFICIENTS TO INCREASE THE PRECISION OF ASPHALT LAYER TEMPERATURE CALCULATIONS IN FWD AND TSD MEASUREMENTS

OPTIMALIZACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW MODELU BELLS3 W CELU ZWIĘKSZENIA PRECYZJI OBLICZEŃ TEMPERATURY WARSTW ASFALTOWYCH W POMIARACH FWD I TSD

STRESZCZENIE. W artykule omówiono proces optymalizacji modelu BELLS3, służącego do prognozowania temperatury warstw asfaltowych, szczególnie w pomiarach ugięć na polskich drogach. Model BELLS3, oparty na danych z programu Long-Term Pavement Performance, jest popularnym narzędziem umożliwiającym szybkie i bezkontaktowe oszacowanie temperatury warstw asfaltowych na różnych głębokościach. Jednakże jego dokładność może być ograniczona w kontekście lokalnych warunków klimatycznych, które różnią się od tych uwzględnionych w oryginalnym modelu. W pracy przeprowadzono analizę weryfikacyjną, testując model na danych z pomiarów FWD, a następnie dokonano jego optymalizacji za pomocą metody najmniejszych kwadratów (MNK). To podejście dało niewielką poprawę dokładności (zaledwie o 1%) przy jednoczesnej redukcji błędu do 2,12°C. Dlatego zdecydowano o rozszerzeniu analizy o zastosowanie metody uczenia maszynowego (MARS), która pozwala na uzyskanie postaci jawnej modelu. Rozwiązanie to poprawiło dokładność o 6%, redukując błąd do 1,84°C. Na tej podstawie zasugerowano dalsze badania nad modelami hybrydowymi i opartymi na sztucznej inteligencji, które mogłyby zwiększyć skuteczność prognozowania temperatury warstw asfaltowych w lokalnych warunkach klimatycznych.

SŁOWA KLUCZOWE: BELLS3, FWD, nawierzchnia, temperatura, TSD, ugięcia, walidacja.

ABSTRACT. The article discusses the optimisation process of the BELLS3 model for predicting the temperature of asphalt layers, especially in deflection measurements on Polish roads. The BELLS3 model, based on data from the Long-Term Pavement Performance programme, is a popular tool for quick and non-contact temperature estimation of asphalt layers at various depths. However, its accuracy may be limited in the context of local climatic conditions, which differ from those included in the original model. In this paper, a verification analysis was carried out through testing the model on FWD measurements data, and then the model was optimised using the least squares method (LSM). This approach yielded a small improvement in accuracy (only 1%) while reducing the error to 2.12°C. Therefore, it was decided to extend the analysis by using a machine learning method (MARS) to obtain the explicit form of the model. The solution improved the accuracy by 6%, at the same time reducing the error to 1.84°C. Based on this, further research was suggested on hybrid and AI-based models that could improve the efficiency of asphalt layer temperature forecasting under local climatic conditions.

KEYWORDS: BELLS3, deflections, FWD, pavement, temperature, TSD, validation.

DOI: 10.7409/rabdim.024.021

¹⁾ Instytut Badawczy Dróg i Mostów, ul. Instytutowa 1, 03-302 Warszawa; jacek.sudyka@ibdim.edu.pl (✉)

²⁾ Instytut Badawczy Dróg i Mostów, ul. Instytutowa 1, 03-302 Warszawa; tomasz.mechowski@ibdim.edu.pl

³⁾ Instytut Badawczy Dróg i Mostów, ul. Instytutowa 1, 03-302 Warszawa; przemyslaw.harasim@ibdim.edu.pl

⁴⁾ Instytut Badawczy Dróg i Mostów, ul. Instytutowa 1, 03-302 Warszawa; miroslaw.graczyk@ibdim.edu.pl

⁵⁾ Instytut Badawczy Dróg i Mostów, Filia Kielce, ul. Chorzowska 28, 25-852 Kielce; andrzej.matysek@ibdim.edu.pl

1. WSTĘP

Dane o stanie technicznym nawierzchni to ważny element systemu zarządzania siecią drogową. Zbierane z ustaloną częstotliwością, odpowiednio przetwarzane, umożliwiają monitorowanie aktualnego stanu sieci oraz co jest równie ważne pozwalają na prognozowanie zmian jej stanu w przyszłości [1]. W tego rodzaju danych nie może zabraknąć oceny trwałości nawierzchni, tym bardziej, że od kilkunastu już lat są dostępne technologie pomiarowe o potwierdzonej przydatności do stosowania na sieciach drogowych. Najbardziej znanymi przedstawicielami tej grupy są urządzenia takie jak TSD (ang. *Traffic Speed Deflectometer*) lub RAPTOR [2, 3, 4]. Dzięki wyeliminowaniu kontaktowego sposobu pomiaru możliwe jest prowadzenie badań z prędkością jak w normalnych warunkach ruchu drogowego, (optymalnie 50-70 km/h), co przekłada się na wysoką efektywność pomiaru oraz bezpieczeństwo wszystkich użytkowników ruchu drogowego. Wśród oczywistych zalet tych metod pomiarowych kryją się też ich niedoskonałości, a jedną z nich jest problem z precyzyjnym określeniem temperatury warstw asfaltowych. W rutynowych pomiarach, wraz z wartościami ugięć rejestruje się tylko temperatury powietrza oraz powierzchni nawierzchni. Jedyną zatem możliwością określenia temperatury warstwy asfaltowej jest zastosowanie odpowiedniego modelu predykcji. Jednym z najczęściej stosowanych jest empiryczny model BELLS3 opracowany na podstawie danych z programu Long-Term Pavement Performance (LTPP) [5].

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników analizy precyzji modelu BELLS3 w polskich warunkach klimatycznych i próby jej zwiększenia poprzez optymalizację współczynników modelu lub zaproponowanie jego nowej zmodyfikowanej postaci. Cały proces weryfikacji pierwotnej postaci modelu wykonano na podstawie danych zgromadzonych w ostatnich kilku latach w trakcie pomiarów ugięć ugięciomierzem FWD, gdzie oprócz automatycznej rejestracji temperatury powietrza i powierzchni dokonuje się manualnego pomiaru temperatury w połowie grubości pakietu warstw asfaltowych.

1. INTRODUCTION

Pavement condition data is an important part of the road network management system. Collected at a predetermined frequency and properly processed, they allow monitoring the current state of the network and, which is of equal importance, allow forecasting changes in its condition in the future [1]. An assessment of pavement durability cannot be missing in this kind of data, especially since measurement technologies with proven applicability to road networks have been available for more than a dozen years now. Such devices as TSD (*Traffic Speed Deflectometer*) or RAPTOR [2, 3, 4] are the best-known representatives of this group. By eliminating the contact method of measurement, it is possible to conduct tests at such speeds as in normal traffic conditions (optimally 50-70 km/h), which translates into high measurement efficiency and safety for all traffic users. On the other hand, the obvious advantages of these measurement methods do not exclude their imperfections, one of which is a problem with accurate determination of the temperature of asphalt layers. In routine measurements, only air and pavement surface temperatures are recorded along with deflection values. Therefore, the only way to determine the temperature of the asphalt layer is to use an appropriate prediction model. One of the most widely used models is the BELLS3 empirical model developed on the basis of data from the Long-Term Pavement Performance (LTPP) programme [5].

The purpose of this article is to present the results of an analysis of the precision of the BELLS3 model under Polish climatic conditions and attempts to increase it by optimising the model coefficients or proposing a new modified form of the model. The entire process of verifying the original form of the model was performed on the basis of data collected over the past few years during deflection measurements by means of an FWD deflection meter, where, in addition to automatic recording of air and surface temperatures, manual temperature measurements are made halfway through the thickness of the asphalt layer package.

2. OKREŚLANIE TEMPERATURY WARSTWY ASFALTOWEJ NA ZADANEJ GŁĘBOKOŚCI Z WYKORZYSTANIEM MODELI OBLICZENIOWYCH

W pomiarach ugięć nawierzchni, na przykład z wykorzystaniem FWD (ang. *Falling Weight Deflectometer*), temperaturę nawierzchni asfaltowej określa się za pomocą bezpośrednich, ręcznych pomiarów. Pomiar temperatury prowadzony w ten sposób dostarcza dokładnych danych, niemniej odnoszących się do pojedynczych lokalizacji. W przypadku wykorzystania urządzeń takich jak ugięciomierz TSD bezpośredni pomiar temperatury nawierzchni jest co najmniej problematyczny i z pewnością obniżałby znacznie wydajność urządzenia. Dlatego w analizie danych tego typu pomiarów należy zastosować odpowiedni model predykcji temperatury najlepiej dostosowany do warunków klimatycznych danego regionu.

Modele prognozowania temperatury nawierzchni asfaltowych zapewniają szybsze, bezpieczniejsze i wydajniejsze sposoby uzyskiwania danych temperaturowych w szerszym zakresie warunków klimatycznych [6]. Jednakże wyzwanie związane z wykorzystaniem opracowanych modeli prognozowania temperatury nawierzchni asfaltowych polega na tym, że ich dokładność jest zasadniczo ograniczona do zakresu oryginalnych danych rozwojowych modelu, a ich dokładność prognozowania będzie wymagała oceny w znacznie różniących się środowiskach [7, 8].

Na podstawie dostępnych badań modele predykcji temperatury nawierzchni można podzielić na trzy główne kategorie: empiryczne, analityczne i numeryczne. Każdy z tych typów modeli różni się poziomem złożoności oraz metodami obliczeń. Empiryczne modele predykcji temperatury nawierzchni są jednymi z najczęściej stosowanych w praktyce. Są one oparte na danych historycznych, które zostały zebrane w trakcie wielu lat badań, a ich celem jest stworzenie prostych równań, które mogą być użyte do przewidywania temperatury warstw asfaltowych na podstawie zmiennych takich jak temperatura powietrza, powierzchni i promieniowanie słoneczne.

Jednym z powszechnie stosowanych modeli predykcji temperatury nawierzchni asfaltowych jest empiryczny model BELLS3. Model ten został opracowany przez Lukanen'a oraz współpracowników w ramach programu

2. DETERMINATION OF ASPHALT LAYER TEMPERATURE AT A GIVEN DEPTH USING COMPUTATIONAL MODELS

In pavement deflection measurements, such as using the FWD (*Falling Weight Deflectometer*), the temperature of the asphalt pavement is determined as a result of direct, manual measurements. Temperature measurement carried out in this way provides accurate data, however relating to single locations. When using devices such as the traffic speed deflectometer (TSD), direct measurement of pavement temperature is problematic, to say the least, and would significantly reduce the device's performance for sure. Therefore, in data analysis as part of such measurements, it is necessary to use an appropriate temperature prediction model best suited to the climatic conditions of the region.

Asphalt pavement temperature prediction models provide faster, safer and more efficient ways to obtain temperature data over a wider range of climatic conditions [6]. However, the challenge of using the developed asphalt pavement temperature forecasting models is that their accuracy is generally limited to the range of the original model development data, and their forecasting accuracy will therefore need to be evaluated in sharply different environments [7, 8].

Based on available research, pavement temperature prediction models can be divided into three main categories: empirical, analytical, and numerical. Each of these types of models differs in its level of complexity and methods of calculation. Empirical pavement temperature prediction models are among the most widely used in practice. They are based on historical data that has been collected over many years of surveying, with the goal of creating simple equations that can be used to predict the temperature of asphalt layers based on variables such as air temperature, surface temperature, and solar radiation.

One of the commonly used asphalt pavement temperature prediction models is the BELLS3 empirical model. This model was developed by Lukanen and colleagues as part of the Long-Term Pavement Performance (LTPP) programme [5]. BELLS3 is based on empirical data collected on different types of pavements and under different climatic conditions, making it a universal solution for predicting the temperature of asphalt layers at a certain depth, based

Long-Term Pavement Performance (LTPP) [5]. BELLS3 bazuje na empirycznych danych zebranych na różnych typach nawierzchni i w różnych warunkach klimatycznych, co czyni go uniwersalnym rozwiązaniem do przewidywania temperatury warstw asfaltowych na określonej głębokości, w oparciu o temperaturę powierzchni nawierzchni i powietrza. Model BELLS3 szczególnie dobrze sprawdza się w sytuacjach, w których wymagane jest szybkie oszacowanie temperatury w warstwie asfaltowej na różnych głębokościach, a jego prosta struktura matematyczna pozwala na łatwe zaimplementowanie go w systemach zarządzania nawierzchnią. Formuła modelu opiera się na równaniach regresji liniowej, które biorą pod uwagę zmienne takie jak temperatura powierzchni, temperatura powietrza, czas trwania ekspozycji nawierzchni na słońce, oraz inne czynniki klimatyczne. Pomimo szerokiego zastosowania, model ten ma ograniczoną dokładność w ekstremalnych warunkach klimatycznych, dlatego też w różnych badaniach podejmowane są próby jego kalibracji dla specyficznych regionów [9].

Liniowe modele empiryczne, takie jak proponowane w [10, 11], opierają się na prostych relacjach między zmiennymi klimatycznymi a temperaturą nawierzchni asfaltowej. Modele te mają zazwyczaj postać równań regresji, które na podstawie danych wejściowych (takich jak temperatura powietrza i nawierzchni) umożliwiają szybkie prognozowanie temperatury na określonych głębokościach warstw asfaltowych. Z kolei modele nieliniowe są bardziej złożone i uwzględniają nieliniową zależność między temperaturą warstwy asfaltowej a zmiennymi klimatycznymi. Modele te są z reguły bardziej precyzyjne, szczególnie w przypadkach, gdy występują ekstremalne warunki pogodowe. Ich zaletą jest możliwość zastosowania w szerokim zakresie warunków klimatycznych, co czyni je użytecznym narzędziem w globalnym zarządzaniu drogami [12, 13].

Analityczne modele predykcji temperatury nawierzchni opierają się na fizycznych właściwościach materiałów i zasadach termodynamiki. Modele te, w przeciwieństwie do modeli empirycznych, próbują modelować procesy przewodzenia ciepła w warstwach asfaltowych. Są one szczególnie użyteczne, gdy chcemy uzyskać precyzyjne informacje na temat przewodzenia ciepła w wielowarstwowych strukturach nawierzchni asfaltowych, bez konieczności wykorzystywania złożonych metod numerycznych. Przykładem takiego modelu jest model

on pavement surface and air temperatures. The BELLS3 model is particularly well suited to situations where rapid estimation of temperature in the asphalt layer at different depths is required, and its simple mathematical structure allows it to be easily implemented in pavement management systems. The model formula is based on linear regression equations that take into account such variables as surface temperature, air temperature, duration of pavement exposure to the sun, and other climatic factors. Despite its widespread use, the model has limited accuracy under extreme climatic conditions, so various studies are attempting to calibrate it for specific regions [9].

Linear empirical models, such as those proposed in [10, 11], are based on simple relationships between climatic variables and asphalt pavement temperature. These models are usually in the form of regression equations, which, based on input data (such as air and pavement temperatures), can quickly predict temperatures at specific depths of asphalt layers. Non-linear models, on the other hand, are more complex and take into account the non-linear relationship between asphalt layer temperature and climatic variables. These models are generally more accurate, especially in cases where there are extreme weather conditions. Their advantage is that they can be applied to a wide range of climatic conditions, making them a useful tool in global road management [12, 13].

Analytical models for predicting pavement temperature are based on physical properties of materials and the principles of thermodynamics. These models, unlike empirical models, attempt to model heat conduction processes in asphalt layers. They are particularly useful when one wants to obtain precise information on heat conduction in multilayer asphalt pavement structures, without having to use complex numerical methods. An example of such a model is the Stefan-Boltzmann model, which is based on the theory of thermal radiation. The Stefan-Boltzmann principle assumes that any heat-emitting object has the capacity to radiate energy in the form of thermal radiation, and it is proportional to the fourth power of its surface temperature. In the context of asphalt pavements, the model can be used to calculate thermal losses due to radiation emissions and thus determine the change in temperature of the asphalt mixture over time. This model is particularly useful for short-term analyses, especially in the context of daily temperature fluctuations. However, it is simplistic compared to more advanced models and

Stefan-Boltzmann'a, który bazuje na teorii promieniowania cieplnego. Zasada Stefan-Boltzmann'a zakłada, że każdy obiekt emitujący ciepło ma zdolność do promieniowania energii w postaci promieniowania cieplnego, i jest ona proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury jego powierzchni. W kontekście nawierzchni asfaltowych, model ten może być użyty do obliczania strat ciepłych w wyniku emisji promieniowania, a tym samym do określenia zmiany temperatury mieszanki mineralno-asfaltowej w czasie. Ten model jest szczególnie użyteczny w analizach krótkoterminowych, zwłaszcza w kontekście dobowych wahań temperatury. Jest on jednak uproszczony w porównaniu z bardziej zaawansowanymi modelami i wymaga znajomości współczynnika emisji nawierzchni asfaltowej, co może stanowić wyzwanie w praktycznych zastosowaniach [14].

Podstawą wielu modeli analitycznych jest prawo przewodnictwa cieplnego Fouriera. W przypadku nawierzchni asfaltowych, modele tego typu uwzględniają, że ciepło przenika przez warstwy w wyniku różnicy temperatur między powierzchnią, a głębszymi warstwami. Na przykład, w badaniach [15], prawo Fouriera było stosowane do modelowania zmian temperatury nawierzchni w czasie, uwzględniając czynniki takie jak przewodnictwo cieplne mieszanki mineralno-asfaltowej oraz warunki atmosferyczne. Zaletą modelu Fouriera jest jego prostota i szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach inżynierii cieplnej. Jednak model ten wymaga znajomości współczynników przewodności cieplnej, które mogą się zmieniać w zależności od temperatury i rodzaju mieszanki mineralno-asfaltowej. W praktyce, model ten jest często stosowany jako element bardziej złożonych modeli numerycznych, które uwzględniają nieliniowe zależności między temperaturą, wilgotnością i przewodnictwem cieplnym nawierzchni asfaltowych.

Modele numeryczne są najbardziej zaawansowanymi narzędziami do symulacji przewodzenia ciepła w nawierzchniach asfaltowych. Wykorzystują one zaawansowane techniki obliczeniowe, takie jak metoda elementów skończonych (MES), metoda różnic skończonych (FDM) oraz metoda objętości skończonych (FVM).

MES pozwala na dokładne odwzorowanie zmian temperatury w czasie i przestrzeni. W badaniach [16] zastosowano MES do symulacji długoterminowych zmian temperatury w nawierzchniach asfaltowych, uwzględniając takie czynniki jak promieniowanie słoneczne, wiatr

requires knowledge of the emission factor of the asphalt pavement, which can be challenging in practical applications [14].

The basis of many analytical models is the Fourier's law of thermal conductivity. For asphalt pavements, models of this type take into account that heat penetrates through the layers as a result of the temperature difference between the surface and deeper layers. For example, in a study [15], the Fourier's law was used to model changes in pavement temperature over time, taking into account such factors as the thermal conductivity of the bituminous mixture and weather conditions. The advantage of the Fourier's model is its simplicity and wide application in various fields of thermal engineering. However, the model requires knowledge of thermal conductivity coefficients, which can vary with temperature and type of bituminous mixture. In practice, the model is often used as part of more complex numerical models that take into account the non-linear relationships between temperature, humidity, and thermal conductivity of asphalt pavements.

Numerical models are the most advanced tools for simulating heat conduction in asphalt pavements. They use advanced computational techniques such as the finite element method (FEM), finite difference method (FDM), and finite volume method (FVM).

FEM allows accurate representation of temperature changes in time and space. Studies [16] have used FEM to simulate long-term temperature changes in asphalt pavements, taking into account such factors as solar radiation, wind, and varying climatic conditions. FEM is particularly useful for analysing temperature gradients in different pavement layers.

FDM is another numerical method used to model heat conduction. Studies [17] have used FDM to analyse temperature gradients at different depths of asphalt pavements. The results of these simulations showed that FDM is able to accurately represent temperature changes, making it an effective method in predicting temperatures under varying climatic conditions.

The finite volume method (FVM) is used to model heat conduction processes in asphalt pavements, especially under thermally variable conditions. Studies [18] have shown that FVM can be effectively used for temperature analysis in asphalt pavements with complex layering,

i zmienne warunki klimatyczne. MES jest szczególnie użyteczna do analizy gradientów temperatury w różnych warstwach nawierzchni.

FDM jest inną metodą numeryczną stosowaną do modelowania przewodzenia ciepła. W badaniach [17] FDM została zastosowana do analizy gradientów temperatury na różnych głębokościach nawierzchni asfaltowych. Wyniki tych symulacji pokazały, że FDM jest w stanie dokładnie odwzorować zmiany temperatury, co czyni ją skuteczną metodą w prognozowaniu temperatur w zmieniających warunkach klimatycznych.

Metoda objętości skończonych (FVM) jest stosowana do modelowania procesów przewodzenia ciepła w nawierzchniach asfaltowych, zwłaszcza w warunkach zmiennych termicznie. Badania [18] wykazały, że FVM może być skutecznie stosowana do analizy temperatury w nawierzchniach asfaltowych o złożonym układzie warstw, gdzie wymagane jest dokładne modelowanie zmian temperatury w czasie i przestrzeni.

W ostatnich latach, ze względu na rozwój metod uczenia maszynowego, coraz większe znaczenie zyskują modele oparte na sztucznej inteligencji. Modele te mają zdolność do przetwarzania ogromnych ilości danych klimatycznych i są w stanie uwzględniać zależności nieliniowe między temperaturą powietrza, promieniowaniem słonecznym, wilgotnością oraz innymi zmiennymi [19]. Algorytmy takie jak sieci neuronowe (ANN) oraz algorytmy regresji wielowymiarowej są szczególnie przydatne do prognozowania temperatury w skomplikowanych warunkach, gdzie tradycyjne modele mogą zawodzić.

Coraz częściej pojawiają się także modele hybrydowe, które łączą cechy modeli empirycznych, analitycznych i numerycznych. Tego typu modele mają na celu połączenie zalet każdej z metod w celu uzyskania większej dokładności. Na przykład modele hybrydowe mogą wykorzystywać równania empiryczne do przewidywania wstępnej temperatury, a następnie stosować modele analityczne lub numeryczne do bardziej precyzyjnych obliczeń w warunkach specyficznych dla danej lokalizacji [20].

Na podstawie przeglądu literatury można zauważyć, że istnieje wiele podejść do prognozowania temperatury nawierzchni asfaltowych. Modele empiryczne, takie jak BELLS3, są szeroko stosowane w praktyce ze względu na swoją prostotę i łatwość implementacji, jednak często wymagają kalibracji dla różnych warunków

where accurate modelling of temperature changes in time and space is required.

In recent years, due to the development of machine learning methods, models based on artificial intelligence have become increasingly important. These models have the ability to process huge amounts of climatic data and are able to account for non-linear relationships between air temperature, solar radiation, humidity, and other variables [19]. Algorithms such as artificial neural networks (ANNs) and multivariate regression algorithms are particularly useful for temperature forecasting under complex conditions, where traditional models can fail.

Hybrid models that combine features of empirical, analytical, and numerical models are also becoming more and more common. These types of models aim at combining the advantages of each method to achieve greater accuracy. For example, hybrid models can use empirical equations to predict the initial temperature and then apply analytical or numerical models for more precise calculations under site-specific conditions [20].

Based on a review of the literature, it can be seen that there are many approaches to predicting the temperature of asphalt pavements. Empirical models such as BELLS3 are widely used in practice due to their simplicity and ease of implementation, but often require calibration for different climatic conditions. Analytical and numerical models, while more complex, offer greater precision, especially under changing climatic conditions. The future in asphalt layer temperature forecasting, however, may belong to models based on artificial intelligence that have the ability to adapt to complex and changing conditions.

3. DETERMINATION OF ASPHALT LAYER TEMPERATURE USING BELLS3

The methods for determining the temperature of asphalt layers that take into account the depth of measurement, which are most commonly used in Poland, comprise direct *in-situ* measurement and the BELLS3 model. In the direct measurement method the layer temperature is measured at mid-depth of the layer with a thermometer before and after the deflection measurement and every 4 hours and whenever the air temperature changes by more than 5°C

klimatycznych. Modele analityczne i numeryczne, choć bardziej złożone, oferują większą precyzję, zwłaszcza w zmieniających się warunkach klimatycznych. Przyszłość w prognozowaniu temperatury warstw asfaltowych może jednak należeć do modeli opartych na sztucznej inteligencji, które mają zdolność adaptacji do złożonych i zmiennych warunków.

3. WYZNACZANIE TEMPERATURY WARSTWY ASFALTOWEJ Z WYKORZYSTANIEM BELLS3

Metody określania temperatury warstw asfaltowych uwzględniające głębokość pomiaru, które są najczęściej stosowane w Polsce, to bezpośredni pomiar *in-situ* i model BELLS3. W metodzie pomiaru bezpośredniego temperaturę warstwy mierzy się w połowie głębokości warstwy za pomocą termometru przed i po pomiarze ugięć oraz co 4 godziny, a także za każdym razem gdy temperatura powietrza zmieni się o więcej niż 5°C w trakcie realizacji pomiaru ugięć [21]. Model BELLS3 zgodnie z założeniami autorów jest przeznaczony do stosowania w pomiarach rutynowych. Modyfikacja ta uwzględnia znacznie krótszy czas zacienienia nawierzchni (nie więcej niż 30 sekund) niż to jest w pomiarach w ramach protokołu LTPP (3 minuty). W związku z tak krótkim czasem pomiaru uważa się, że chłodzenie powierzchni nawierzchni spowodowane działaniem zacienienia przez urządzenie jest znikome [22].

Aby przewidzieć temperaturę warstwy model BELLS wykorzystuje cztery parametry zgodnie z równaniem (1):

T_d = \beta_0 + \beta_1 \cdot IR + [\log(d) - 1,25] \cdot [\beta_2 \cdot IR + \beta_3 \cdot T_{(1-day)} + \beta_4 \cdot \sin(hr_{18} - 15,5)] + \beta_5 \cdot IR \cdot \sin(hr_{18} - 13,5), \tag{1}

gdzie:

- T_d – temperatura nawierzchni na głębokości d w warstwie, [°C];
- IR – temperatura powierzchni mierzona ze wskaźnika temperatury w podczerwieni, [°C];
- d – głębokość, na której ma być przewidywana temperatura, [mm];
- T_{(1-day)} – średnia temperatura powietrza z dnia poprzedniego, [°C];
- hr_{18} – pora dnia w układzie 24-godzinnym, obliczona na podstawie 18-godzinnego czasu wzrostu i spadku temperatury warstwy.

Współczynniki (B_1, B_2, ..., B_5) modelu BELLS3 przedstawiono w Tabl. 1.

during the deflection measurement [21]. The BELLS3 model, as assumed by the authors, is intended for use in routine measurements. This modification takes into account a much shorter pavement shading time (no more than 30 seconds) than what is measured under the LTPP protocol (3 minutes). Due to such a short measurement time, the cooling of the pavement surface caused by the device’s shading effect is believed to be negligible [22].

To predict the layer temperature, the BELLS model uses four parameters according to equation (1):

T_d = \beta_0 + \beta_1 \cdot IR + [\log(d) - 1.25] \cdot [\beta_2 \cdot IR + \beta_3 \cdot T_{(1-day)} + \beta_4 \cdot \sin(hr_{18} - 15.5)] + \beta_5 \cdot IR \cdot \sin(hr_{18} - 13.5), \tag{1}

where:

- T_d – temperature of the pavement at depth d in the layer, [°C];
- IR – surface temperature measured by the infrared temperature indicator, [°C];
- d – depth at which the temperature is to be predicted, [mm];
- T_{(1-day)} – the previous day’s average air temperature, [°C];
- hr_{18} – the time of day on a 24-hour basis, calculated from the 18-hour layer temperature rise and fall time.

The coefficients (B_1, B_2, ..., B_5) of the BELLS3 model are shown in Table 1.

Table 1. BELLS3 model coefficients
Tablica 1. Współczynniki modelu BELLS3

Coefficient Współczynnik	BELLS3
\beta_0	+0.950
\beta_1	+0.892
\beta_2	−0.448
\beta_3	+0.621
\beta_4	+1.830
\beta_5	+0.042

Wadą metody pomiaru bezpośredniego jest pomiar temperatury w jednym punkcie i przyporządkowanie tej temperatury do odcinka drogi, co powoduje dużą niepewność [23], zwiększaną dodatkowo przez zmiany grubości warstw asfaltowych wzdłuż drogi. Z kolei metoda BELLS3 jest bardzo czuła na zmiany temperatury rejestrowanej automatycznie w podczerwieni *IR* w trakcie pomiaru ugięć (Rys. 1).

The disadvantage of the direct measurement method is that it measures the temperature at a single point and assigns that temperature to a section of the road resulting in large measurement uncertainty [23] which is further increased by changes in the thickness of asphalt layers along the road. The BELLS3 method, on the other hand, is very sensitive to temperature changes automatically recorded in infrared *IR* during deflection measurements (Fig. 1).

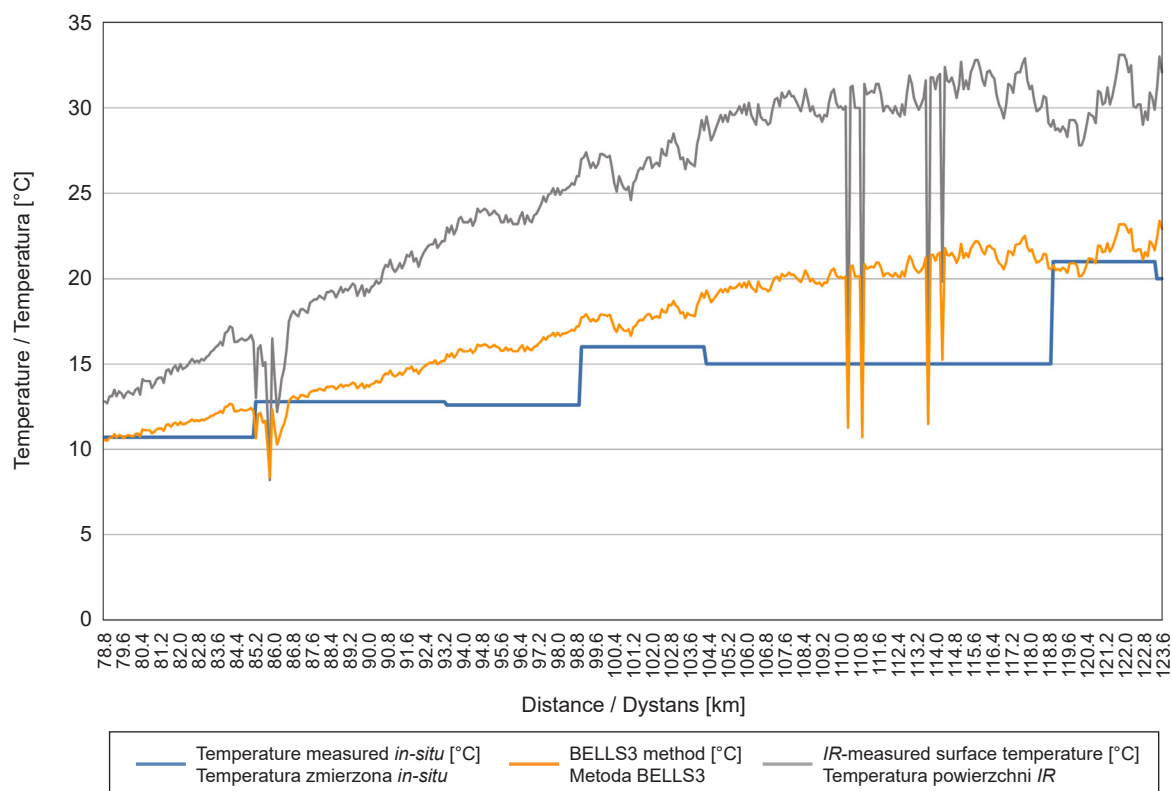


Fig. 1. Determination of layer temperature at 120 mm depth using the BELLS3 model in comparison with direct measurements and *IR* automatic measurement of surface temperature.

Rys. 1. Wyznaczanie temperatury warstwy na głębokości 120 mm za pomocą modelu BELLS3 w porównaniu z pomiarami bezpośrednimi i pomiarem automatycznym temperatury powierzchni *IR*.

4. ANALIZA STRUKTURY I JAKOŚCI ZBIORU WEJŚCIOWEGO

W analizie wykorzystano dane z pomiarów ugięć realizowanych ugięciomierzem FWD w latach 2021-2023 na odcinkach dróg w Polsce. Lokalizacja punktów pomiarowych została pominięta w dalszych analizach, ale stanowi dowód o zachowaniu losowości podczas pozyskiwania danych wejściowych. Dla zachowania spójności z oryginalnym modelem BELLS3 dane oznaczono tymi samymi symbolami jak w równaniu (1). Nagłówek tablicy danych wraz z dwoma pierwszymi rekordami danych

4. ANALYSIS OF THE STRUCTURE AND QUALITY OF THE INPUT DATA SET

The analysis uses data from deflection measurements carried out with the FWD deflectometer in the years 2021-2023 on certain road sections in Poland. The location of the measurement points was skipped in further analysis, but provides evidence of randomness during input data acquisition. For consistency with the original BELLS3 model, the data is denoted with the same symbols as in equation (1). The header of the data table along with the first two data records are shown in Table 2. In addition,

przedstawiono w Tabl. 2. Dodatkowo wprowadzono dane pomocnicze: h – godzina pomiaru, T_{Air} – temperatura powietrza w chwili pomiaru. W celu uproszczenia obliczeń tablicę danych rozszerzono o zmienne pomocnicze $sSin15.5$ i $sSin13.5$, które zgodnie z dokumentacją modelu są wyznaczane dzięki zmiennej pomocniczej hr_{18} i odpowiadają wartościom $\sin(hr_{18} - 15.5)$ i $\sin(hr_{18} - 13.5)$ w równaniu (1).

Table 2. The header along with the first two records of the input file
Tablica 2. Nagłówek wraz z dwoma pierwszymi rekordami pliku wejściowego

id	h	$T_{(l-day)}$	T_d	IR	T_{Air}	d	hr_{18}	$sSin15.5$	$sSin13.5$
1	13:17:30	17.3	26.6	29.7	23.3	120	13.29	-0.696747903	-0.072657971
2	13:04:09	15.3	25.0	37.8	26.6	120	13.07	-0.750303406	-0.149822955

Ponieważ konstrukcja badanych nawierzchni była zbliżona, a krytyczna z punktu widzenia właściwego oszacowania temperatury grubość warstw asfaltowych wynosiła nie mniej niż 20 cm bezpośredni pomiar temperatury *in-situ* T_d następował zawsze na głębokości 120 mm. W strukturze danych temperatura ta pełniła rolę zmiennej zależnej. Pozostałe dane pomiarowe (h , $T_{(l-day)}$, IR , T_{Air}) odpowiadają tylko tym punktom, w których nastąpił pomiar temperatury *in-situ*. Dane te wraz z obliczonymi zmiennymi pomocniczymi pełniły rolę predyktorów.

W zbiorze danych N , który składał się z 971 rekordów nie zaobserwowano niekompletnych elementów, a wszystkie cechy miały charakter ilościowy. W analizie wartości odstających (ang. *outlier analysis*) wykorzystano kryterium Tukeya oparte o rozstęp międzykwartylowy IRQ . Ostatecznie, wartości które mogą być zakwalifikowane jako odstające muszą być poza przedziałem $Me \div 3 \cdot IRQ$, gdzie $IRQ = Q3$ (kwartył III) – $Q1$ (kwartył I) [24]. Na podstawie wyników zagregowanych w Tabl. 3 nie zaobserwowano wartości odstających.

Table 3. Input data set quality evaluation
Tablica 3. Ocena jakości danych zbioru wejściowego

Variable Zmienna	Scale type Typ skali	N important N ważnych	% N	Number of outliers Liczba odstających	Percentage of outliers Procent odstających	Variable quality Jakość zmiennej
$T_{(l-day)}$	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	OK
T_d	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	OK
IR	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	redundant / nadmiarowe
T_{Air}	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	OK
d	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	constant / stałe
$sSin15.5$	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	OK
$sSin13.5$	quantitative / ilościowy	971	100	0	0	OK

auxiliary data were entered: h – the time of measurement, T_{Air} – the air temperature at the time of measurement. To simplify the calculations, the data table was expanded to include auxiliary variables $sSin15.5$ and $sSin13.5$, which, according to the model documentation, are determined by the auxiliary variable hr_{18} and correspond to the values of $\sin(hr_{18} - 15.5)$ and $\sin(hr_{18} - 13.5)$ in equation (1).

Since the design of the tested pavements was similar, and the critical thickness of the asphalt layers from the point of view of proper temperature estimation was no less than 20 cm, the direct *in-situ* measurement of temperature T_d was always made at a depth of 120 mm. In the data structure the temperature acted as the dependent variable. The other measured data (h , $T_{(l-day)}$, IR , T_{Air}) correspond only to those points where *in-situ* temperature measurement occurred. These data, along with calculated auxiliary variables, acted as predictors.

No incomplete data records were observed in the dataset N , which consisted of 971 records, and all features were quantitative. The outlier analysis used the Tukey criterion based on the interquartile range of the IRQ . Finally, values that can be classified as outliers must be outside the $Me \div 3 \cdot IRQ$ interval, where $IRQ = Q3$ (quartile III) – $Q1$ (quartile I) [24]. Based on the results aggregated in Table 3, no outliers were observed.

Pomiędzy zmienną IR a T_{Air} zaobserwowano silną, istotną korelację (współczynnik korelacji r) na poziomie 0,88. W związku z tym jedna z nich ma charakter nadmiarowy. Współliniowość pomiędzy predyktorami (nadmiarowość) ma negatywny wpływ na stabilność modelu szczególnie o charakterze liniowym (addytywnym). Zmienna d ma wartość stałą równą 120 mm. Mimo to nie usunięto jej z modelu a jej wpływ został wyrażony przez współczynniki eksperymentalne.

Ostatnim elementem oceny było sprawdzenie charakteru rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych. Na Rys. 2 zestawiono histogramy rozkładu zmiennej oraz dopasowanie modelu rozkładu normalnego wraz z obliczonymi wartościami statystyk. Wśród zmiennych biorących udział w prognozowaniu cechy T_d dwie cechy $sSin15.5$ i $sSin13.5$ mają rozkład silnie odbiegający od normalnego, sugerując występowanie dwóch wartości modalnych: -1 oraz 1 .

A strong significant correlation (correlation coefficient r) of 0.88 was observed between the IR and T_{Air} variables. Consequently, one of them is redundant. Collinearity between predictors (redundancy) has a negative impact on the stability of the model, especially the one of a linear (additive) nature. Variable d has a constant value equal to 120 mm. Nevertheless, it was not removed from the model and its influence was expressed by experimental coefficients.

The final element of the evaluation was to check the nature of the probability distribution of the variables. Fig. 2 summarises the distribution histograms of the variable and the adjustment of the normal distribution model along with the calculated values of the statistics. Among the variables involved in the prediction of the T_d feature two features $sSin15.5$ and $sSin13.5$ are distributed in a manner that deviates strongly from normal suggesting the presence of two modal values: -1 and 1 .

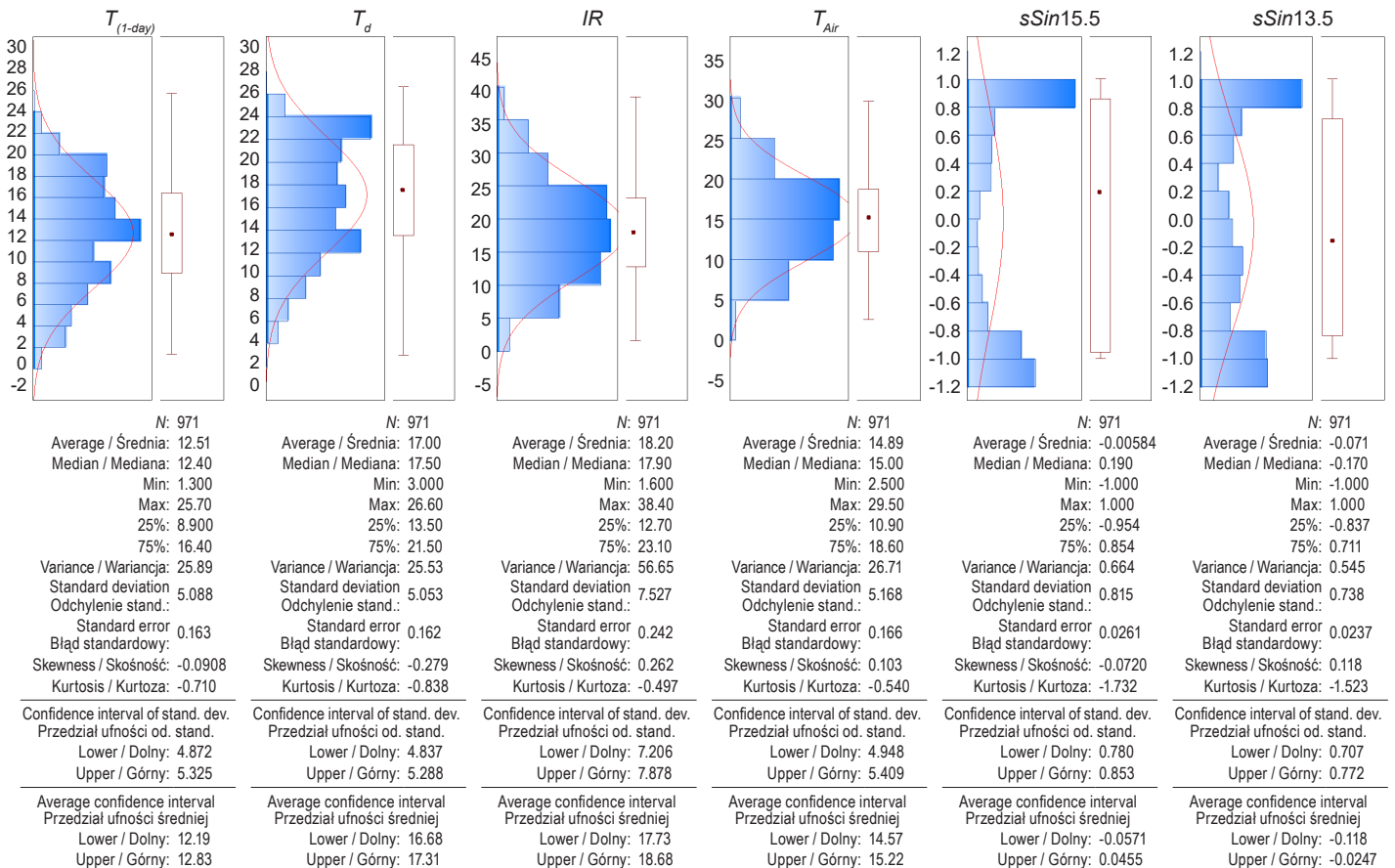


Fig. 2. Assessing the distribution of predictors

Rys. 2. Ocena dystrybucji predyktorów

Cechy IR , T_{Air} oraz $T_{(1-day)}$ mają rozkład zbliżony do normalnego o niewielkiej skośności. W przypadku cechy T_d zaobserwowano niewielki lewo skośny charakter rozkładu oraz występowanie możliwych dwóch wartości modalnych. Podsumowując, cały zbiór danych można uznać za kompletny i niewymagający dodatkowej interwencji. Zaobserwowany efekt współliniowości oraz odchyłeń od normalności cech T_d , $sSin13.5$ oraz $sSin15.5$ zostanie dodatkowo zweryfikowany na etapie modelowania.

5. OCENA JAKOŚCI OBOWIĄZUJĄCEGO MODELU BELLS3

Kluczowym etapem badań nakreślającym dalszą ścieżkę postępowania co do modyfikacji obecnego modelu była ocena zbieżności wyników temperatury nawierzchni T_d prognozowanej z zastosowaniem obowiązującego modelu BELLS3. Oceniając strukturę modelu należy stwierdzić, że jest to model w pełni liniowy względem parametrów, lecz częściowo nieliniowy względem zmiennych. Nieliniowość ta wynika z faktu występowania zmiennej d w postaci logarytmu, jednak z uwagi na stałą jej wartość, nieliniowość wywołana jej oddziaływaniem jest znikoma. Model ma postać addytywną, którego formuła składa się z licznych interakcji pomiędzy zmiennymi określającymi zmianę temperatury powietrza $T_{(1-day)}$ lub powierzchni nawierzchni IR . W modelach liniowych wielocechowych, którym jest BELLS3, istotną kwestią jest ocena współliniowości pomiędzy zmiennymi oraz analiza reszt. Poprawnie wykonana identyfikacja parametrów zakłada, że skorelowanie pomiędzy predyktorami jest mniejsze niż pomiędzy predyktorami a potencjalną zmienną zależną. Na Rys. 3 przedstawiono tablicę korelacji pomiędzy zmiennymi w modelu.

The IR , T_{Air} and $T_{(1-day)}$ features are distributed in a manner close to normal with a slight skewness. In the case of the T_d feature, a slight left-skewed distribution was observed, as well as the presence of two possible modal values. Summing up, the entire dataset can be considered complete and does not require additional intervention. The observed effect of collinearity and deviations from normality of the features T_d , $sSin13.5$ and $sSin15.5$ will be further verified at the modelling stage.

5. ASSESSING THE QUALITY OF THE CURRENT BELLS3 MODEL

A key step in the research outlining the next path forward as to how to modify the current model was to assess the convergence of the results of the pavement temperature T_d predicted using the current BELLS3 model. Assessing the structure of the model it should be said that it is fully linear with respect to the parameters, but partially non-linear with respect to the variables. This non-linearity is due to the fact that the variable d is in the form of a logarithm, but because its value is constant, the non-linearity caused by its interaction is negligible. The model has an additive form, whose formula consists of numerous interactions between variables determining the change in air temperature $T_{(1-day)}$ or IR pavement surface. In multivariate linear models, such as BELLS3, an important issue is the evaluation of collinearity between variables and the analysis of residuals. Correctly performed parameter identification assumes that the correlation between predictors is lower than that between predictors and the potential dependent variable. Fig. 3 shows a table of correlations between the variables in the model.

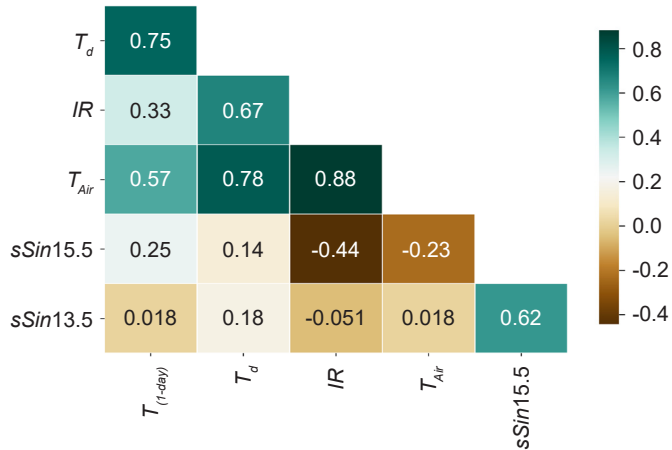


Fig. 3. Correlation table of variables
Rys. 3. Tablica korelacji zmiennych

Aby uzyskać informację na temat skuteczności istniejącego modelu do prognozowania nowych danych dokonano prognozy temperatury T_d na głębokości 120 mm. Relację pomiędzy wynikami przewidywanymi i obserwowanymi przedstawia Rys. 4.

Jakość dopasowania oceniono przez pryzmat podstawowych metryk statystycznych przedstawionych, to jest współczynnik determinacji R^2 i pierwiastek błędu średniokwadratowego $RMSE$. Rezultaty, jakie uzyskano w procesie dopasowania danych modelowanych do eksperymentalnych wyniosły $R^2 = 82\%$ i $RMSE = 2,3^\circ\text{C}$. Niniejsze wartości metryk były traktowane jako punkt odniesienia, z którym porównano dalsze działania mające na celu zwiększenie efektywności w prognozowaniu temperatury w nawierzchni dla głębokości 120 mm.

To get an idea of the effectiveness of the existing model to forecast new data, a prediction of T_d temperature at a depth of 120 mm was made. The relationship between predicted and observed results is shown in Fig. 4.

The quality of fit was assessed in the light of the basic statistical metrics presented, that is, the coefficient of determination R^2 and root mean square error $RMSE$. The results that were obtained in the process of fitting the modelled data to the experimental data were $R^2 = 82\%$ and $RMSE = 2.3^\circ\text{C}$. The present metric values were treated as a benchmark against which further efforts were compared to improve efficiency in predicting pavement temperatures for 120 mm depths.

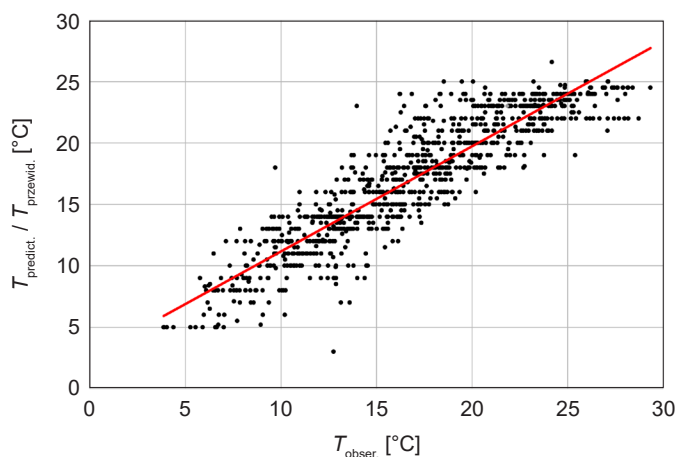
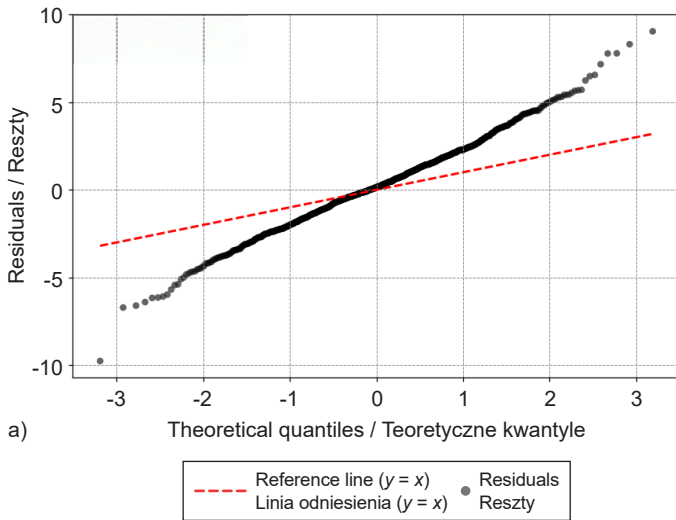


Fig. 4. Quality of fit between model results T_{predict} and experimental results T_{obs} .
Rys. 4. Jakość dopasowania wyników modelowych $T_{\text{przewid.}}$ do eksperymentalnych $T_{\text{obser.}}$

Obserwując rozkład reszt (Rys. 5a) należy zwrócić uwagę na znaczące odchylenie wyników od linii teoretycznego rozkładu Q-Q reszt. Istnieje pewien zbiór wyników, uzyskanych na podstawie modelu, który ma charakter odstający. W przypadku tej analizy źródło braku normalności reszt (niespełnienie postulatu homoscedastyczności) może wynikać z dwóch powodów. Pierwszy to przypadek, gdy liczba danych pochodziła w dużej mierze z małej liczby odcinków. Drugim powodem mogło być to, że wyniki pochodzą z dużej liczby odcinków o zróżnicowanej konstrukcji i właściwościach temperaturowych materiałów. Obserwując sygnatury czasowe pomiarów pierwsza przyczyna miała znikome znaczenie. Zatem istnieją czynniki towarzyszące, który wpłynęły na dużą wartość odchylenia pomiędzy wynikami prognozowanymi przez model BELLS3 i wynikami eksperymentalnymi.

Observing the distribution of residuals (Fig. 5a) one needs to note a significant deviation of the results from the line of the theoretical Q-Q distribution of residuals. There is a certain set of results, derived from the model, which is an outlier. In the case of this analysis the source of the lack of normality of the residuals (failure to meet the homoscedasticity postulate) can be attributed to two reasons. The first is a case where the number of data came largely from a small number of episodes. A second reason may have been that the results came from a large number of sections with varying design and temperature properties of the materials. Observing the time signatures of the measurements the first reason was of negligible importance. Thus, there are accompanying factors that influenced the large value of the deviation between the results predicted by the BELLS3 model and the experimental

Nie należy również wykluczyć istnienia czynnika systematycznego, którego wydzźwięk można zauważyć w rozkładzie wyników $T_d > 20^\circ\text{C}$ (Rys. 5b). Występowanie czynnika systematycznego może być potęgowane poprzez silne skorelowanie predyktorów pomiędzy sobą a niskim ich skorelowaniem ze zmienną zależną. Tego typu problemów nie można w pełni wyeliminować stosując liniową klasę modeli regresyjnych.



The existence of a systematic factor should also not be excluded, the impact of which can be seen in the distribution of $T_d > 20^\circ\text{C}$ results (Fig. 5b). The presence of a systematic factor can be compounded by the strong correlation of predictors between themselves and their low correlation with the dependent variable. Such problems cannot be fully eliminated by using a linear class of regression models.

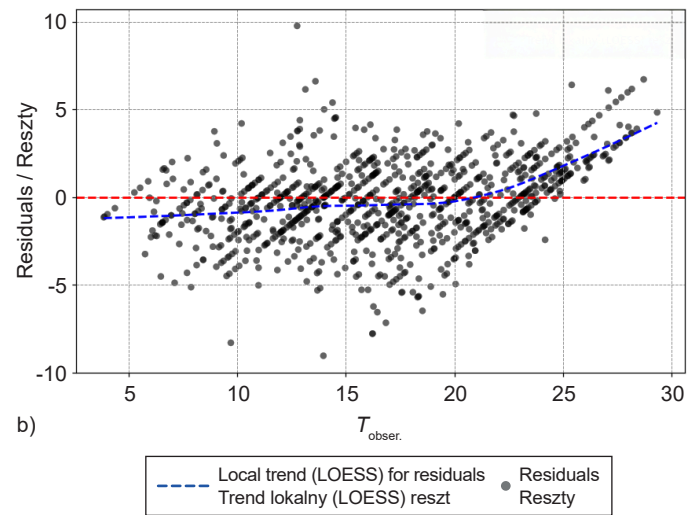


Fig. 5. Evaluating the normality of the residuals of the BELLS3 model:
a) Q-Q quantile chart; b) distribution of residuals against predicted temperature
Rys. 5. Ocena normalności reszt modelu BELLS3:

a) wykres kwantylowy Q-Q; b) rozkład reszt względem temperatury przewidywanej

6. OPTIMALIZACJA MODELU BELLS3

Ponieważ BELL3 to model liniowy, zrezygnowano z estymacji parametrów za pomocą metod iteracyjnych, które wykorzystują *solvery* wymagane przy identyfikacji parametrów modeli nieliniowych. We wstępnych analizach, mimo zastosowania metod iteracyjnych, nie uzyskano żadnej znaczącej poprawy w zakresie zdolności predykcyjnych modelu.

W konsekwencji, optymalizację parametrów modelu przeprowadzono za pomocą metody najmniejszych kwadratów (MNK) [25] w jego liniowej postaci, dodatkowo wykorzystując sprawdzian krzyżowy [26]. Sprawdzian ten pomaga ocenić, czy zmienna zależna wymaga dodatkowej transformacji w celu ograniczenia dużej wariancji.

Dodatkowo, przy użyciu technik transformacyjnych Boxa-Coxa [27], oceniono, czy zmienna zależna powinna zostać poddana transformacji, aby poprawić jej właściwości statystyczne. W wyniku analizy uzyskano wartość

6. OPTIMISATION OF THE BELLS3 MODEL

Since BELL3 is a linear model, parameter estimation by means of iterative methods that use solvers required for parameter identification of non-linear models was abandoned. In preliminary analyses, despite the use of iterative methods, no significant improvement in the model's predictive ability was achieved.

Consequently, optimisation of the model parameters was carried out using the least squares method [25] in its linear form and additionally a cross-check [26]. This cross-check helps assess whether the dependent variable requires an additional transformation to reduce a large variance.

Moreover, using Box-Cox transformation techniques [27], it was evaluated whether the dependent variable should be transformed to improve its statistical properties. The analysis resulted in a parameter value of $\lambda = 1.23$ which

parametru $\lambda = 1,23$, co jest bliskie wartości $\lambda = 1$. Oznacza to, że dodatkowa transformacja logarymiczna lub zastosowanie funkcji odwrotnościowej nie przyniesie oczekiwanych rezultatów. Dlatego zastosowano związek identycznościowy pomiędzy zmienną zależną a predyktorami, bez dodatkowej transformacji zmiennej zależnej.

Obecnie preferowaną metodą poprawy i oceny jakości modeli jest sprawdzian krzyżowy (ang. *cross-validation*) [28]. W analizie zastosowano pięciokrotną walidację krzyżową. Proces ten polega na podzieleniu zbioru danych na k podzbiorów. Model jest dopasowywany k razy, z każdym podzbiorem użytym raz jako zbiór testowy, a pozostałymi $k-1$ podzbiarami jako zbiory treningowe. Taka procedura zapewnia wysoką dokładność predykcji uzyskanych modeli.

Zoptymalizowany model BELLS3, oznaczony jako BELLS3_O, poddano optymalizacji metodą MNK z uwzględnieniem walidacji krzyżowej, a wyniki przedstawiono w Tabl. 4.

Table 4. The optimised BELLS3_O model for a measurement depth of 120 mm
Tablica 4. Zoptymalizowany model BELLS3_O dla głębokości pomiaru 120 mm

Expression Wyrażenie	Parameter Parametr	Experimental coefficient Współczynnik eksperymentalny	Standard error Błąd standardowy	t-value t-wartość	p-value p-wartość
Free parameter / Wyraz wolny	β_0	3.3529179	0.2180477	15.376991	0.0000000
IR	β_1	0.4304661	0.0129874	33.144963	0.0000000
$IR \cdot (\log(d) - 1.25)$	β_2	—*)	—*)	—*)	—*)
$T_{(1-day)} \cdot (\log(d) - 1.25)$	β_3	0.5632810	0.0210821	26.718391	0.0000000
$sSin15.5 \cdot (\log(d) - 1.25)$	β_4	1.7409726	0.1525311	11.413884	0.0000000
$IR \cdot sSin13.5$	β_5	0.0158341	0.0075262	2.103855	0.0356491
R^2	83%				
$RMSE$ [°C]	2.12				
*) – not applicable / brak danych					

Wstępnie można stwierdzić, że najmniejszy istotny wpływ na wartość temperatury w nawierzchni T_d miała interakcja $IR \cdot sSin13,5$, natomiast największy wpływ na T_d miała cecha IR . W wyniku zaobserwowanej nadmiarowości względem cechy IR wskazanej w Tabl. 3 wyrażenie reprezentowane przez parametr β_2 zostało usunięte z modelu. Ostatecznie zmodyfikowana postać BELLS3_O uzyskała następującą postać jawną (2):

$$T_d = 3,353 + 0,43 \cdot IR + [\log(d = 120) - 1,25] \cdot [0,564 \cdot T_{(1-day)}] + 1,741 \cdot sSin15,5 + 0,016 \cdot IR \cdot sSin13,5. \quad (2)$$

is close to the value of $\lambda = 1$. This means that an additional logarithmic transformation or the use of an inverse function will not yield the expected results. Therefore, an identity relationship between the dependent variable and the predictors was used, with no additional transformation of the dependent variable.

Currently, cross-validation is the preferred method for improving and assessing the quality of models [28]. A 5-fold cross-validation was used in the analysis. This process involves dividing the dataset into k subsets. The model is fitted k times, with each subset used once as a test set, and the remaining $k-1$ subsets as training sets. Such a procedure ensures high prediction accuracy of the obtained models.

The optimised BELLS3 model, designated BELLS3_O, was optimised using the least squares method with cross-validation, and the results are shown in Table 4.

Preliminarily, it can be concluded that the $IR \cdot sSin13.5$ interaction had the least significant effect on the pavement temperature value T_d , while the IR feature had the greatest effect on T_d . As a result of the observed redundancy with respect to the IR feature indicated in Table 3 the expression represented by the parameter β_2 was removed from the model. Finally, the modified form of BELLS3_O obtained the following explicit form (2):

$$T_d = 3.353 + 0.43 \cdot IR + [\log(d = 120) - 1.25] \cdot [0.564 \cdot T_{(1-day)}] + 1.741 \cdot sSin15.5 + 0.016 \cdot IR \cdot sSin13.5. \quad (2)$$

Oceniając proces estymacji modelu BELLS3_O ustalono, że jego jakość wzrosła tylko o 1% w stosunku do referencyjnego BELLS3, natomiast błąd estymacji *RMSE* zmniejszył się o 0,18°C. Proces optymalizacji nie przyniósł zatem spektakularnego sukcesu.

Dodatkowo przeprowadzono ocenę jakości reszt, której wynik w formie graficznej przedstawiono na Rys. 6 (wygenerowany przez pakiet *plotmo* w języku programowania R).

Evaluating the estimation process of the BELLS3_O model it was found that its quality increased by only 1% compared to the reference BELLS3, while the *RMSE* estimation error decreased by 0.18°C. The optimisation process has therefore not been spectacularly successful.

In addition, an evaluation of the quality of the residuals was carried out, the result of which is shown in graphical form in Fig. 6 (generated by the *plotmo* package in the R programming language).

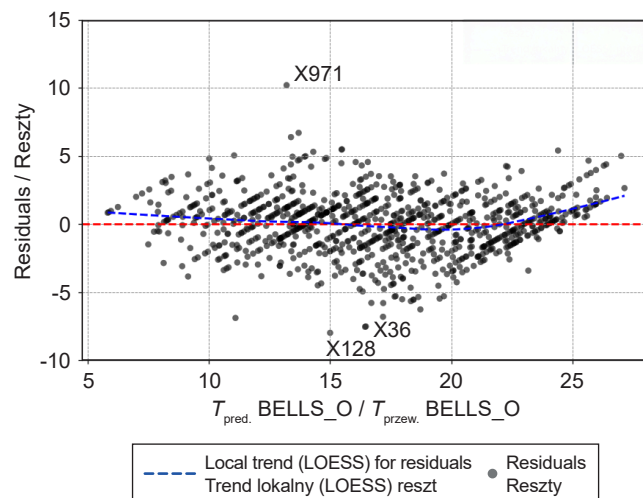


Fig. 6. Scatter of residuals as a function of predicted T_d (Fitted values) of the optimised BELLS3_O model

Rys. 6. Rozrzut reszt (Residuals) w funkcji prognozowanego T_d (Fitted values) dla optymalizowanego modelu BELLS3_O

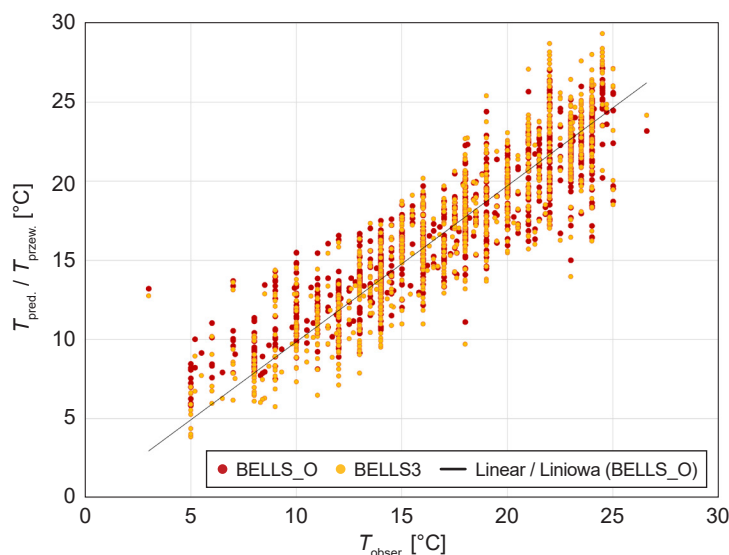
Podobnie jak w modelu referencyjnym BELLS3 (Rys. 5b) zaobserwowano pewne odchylenie od normalności reszt w zakresie poniżej 10°C oraz powyżej 20°C. W warunkach idealnej homoscedastyczności reszt (idealny rozkład normalny) linia czerwona powinna być pozioma. Każde jej odchylenie od poziomu sugeruje występowanie pewnej systematyczności w zbiorze danych wejściowych. Niniejsze efekty nie zostały wyeliminowane pomimo poddania zoptymalizowanego modelu BELLS3_O procesowi walidacji krzyżowej. Obserwowane na wykresie trzy wartości odstające zależą od przebiegu funkcji modelu.

Obserwując uzyskane wyniki zbieżności modelu BELLS3_O z linią teoretyczną, symbolizującą idealne dopasowanie (Rys. 7), należy stwierdzić, że wynik poprawy zbieżności modelu BELLS3 z danymi eksperymentalnymi jest niewystarczający. W związku z tym wymagane są dalsze działania w celu zidentyfikowania najefektywniejszej techniki, za pomocą której zbieżność modelu będzie oscylowała wokół wartości $R^2 = 90\%$. Jako zasadniczą przyczynę takiego stanu rzeczy należy przyjąć brak informacji

As in the BELLS3 reference model (Fig. 5b) some deviation from normality of the residuals was observed in the range below 10°C and above 20°C. Under conditions of ideal homoscedasticity of the residuals (ideal normal distribution) the red line should be horizontal. Any deviation from its level suggests the presence of some systematicity in the input data set. These effects were not eliminated despite subjecting the optimised BELLS3_O model to a cross-validation process. The three outliers observed in the graph depend on the course of the model function.

Observing the obtained results of convergence of the BELLS3_O model with the theoretical line symbolising the ideal fit (Fig. 7) it should be concluded that the result of improving the convergence of the BELLS3 model with the experimental data is insufficient. Therefore, further work is required to identify the most effective technique whose application will yield the convergence of the model oscillating around the $R^2 = 90\%$ value. The lack of information on material properties in the BELLS3 model should be taken as the primary reason for this. Particularly

na temat właściwości materiałów w modelu BELLS3. Szczególnie istotne są tu dane na temat współczynnika przewodzenia ciepła oraz ciepła właściwego, od których zależy rozkład temperatury w czasie. Niestety w przypadku modelu BELLS3 oraz BELLS3_O niniejszy zbiór informacji jest uśredniony i wyrażony w postaci współczynników eksperymentalnych β_i . W przypadku próby prognozowania temperatury dla materiałów znacząco odbiegających pod względem ich właściwości termicznych od zbioru, na podstawie którego autorzy modelu BELLS3 oszacowali współczynniki, mogą pojawić się duże różnice w wartościach prognozowanych T_d . Należy również wyraźnie podkreślić, że model (2) został zoptymalizowany dla głębokości odczytu temperatury $d = 120$ mm, która była obecna w pliku wejściowym. Gdyby odczyt był wykonany na innej głębokości $d \in (0;120)$, można rozważyć zastosowanie interpolacji liniowej.



relevant here are data on thermal conductivity and specific heat, on which the temperature distribution over time depends. Unfortunately, in the case of the BELLS3 and BELLS3_O model, this set of information is averaged and expressed in terms of experimental coefficients β_i . When attempting to predict temperatures for materials that differ significantly in terms of their thermal properties from the set from which the authors of the BELLS3 model estimated the coefficients large differences in the predicted T_d values can occur. It should also be clearly noted that model (2) was optimised for a temperature reading depth of $d = 120$ mm, which was present in the input file. If a result between $d \in (0;120)$ is needed, linear interpolation can be considered.

Fig. 7. Comparison of the BELL3_O model with the BELLS3 reference model
Rys. 7. Porównanie modelu BELL3_O z modelem referencyjnym BELLS3

7. WSTĘPNA ANALIZA TECHNIK UCZENIA MASZYNOWEGO DO POPRAWY JAKOŚCI MODELU BELLS3

Kluczową zasadą modeli liniowych jest, zgodnie z nazwą, liniowość pomiędzy zmiennymi, a w szczególności liniowość względem parametrów. Choć znacznie uprasza to proces estymacji to w przypadku istnienia nieliniowych zależności pomiędzy predyktorami, techniki oparte o metodę MNK są mało skuteczne. W przypadku posiadania znacznego zbioru danych można wykorzystać w stosunkowo nieskomplikowany sposób, techniki uczenia maszynowego do jawnego lub niejawnego identyfikowania silnie nieliniowych relacji między predyktorami

7. PRELIMINARY ANALYSIS OF MACHINE LEARNING TECHNIQUES FOR IMPROVING THE QUALITY OF THE BELLS3 MODEL

The key principle of linear models is, as the name suggests, linearity between variables, and in particular linearity with respect to parameters. Although this greatly simplifies the estimation process, when there are non-linear relationships between predictors, techniques based on the least squares method are not very effective. Where there is a significant dataset, machine learning techniques can be used to explicitly or implicitly identify strongly non-linear relationships between predictors and the

a zmienną zależną [29, 30]. Ponadto pozwalają na usankcjonowanie relacji ukrytych w zbiorze pomiędzy predyktorami, czego klasyczny model liniowy nie jest w stanie wykonać.

W ramach wstępnej analizy wykorzystano metodę uczenia maszynowego MARS (ang. *Multivariate Adaptive Regression Splines*), jedną z nielicznych technik pozwalającą na uzyskanie modelu w postaci jawnej, czyli równania matematycznego. MARS jest nieparametryczną metodą regresji statystycznej wykorzystywaną w zadaniach przeznaczonych dla *data mining*. Pozwala na szybką estymację modelowania skomplikowanych, nieliniowych zależności o dużej liczbie zmiennych niezależnych [31]. W modelu zmienne nieistotne są eliminowane poprzez określoną wartość progową w taki sposób, aby uzyskać minimalny błąd *GCV* (ang. *generalised cross validation error*) i maksymalną wartość współczynnika determinacji R^2 [32]. Występujący w procesie implementacji modelu błąd *GCV* oblicza się w oparciu o klasyczny błąd MSE (ang. *mean square error*) oraz uwzględnia złożoność modelu (współczynnik C).

Po przeprowadzeniu strojenia modelu, uzyskał on następujące parametry uczenia i oceny: $degree = 2$, $npruned = 60$, $RMSE = 1,84^\circ\text{C}$, $R^2 = 87\%$, $GCV = 3,48^\circ\text{C}$, a ostatecznie zmodyfikowana postać BELLS3_O uzyskała postać jawną (3):

$$\begin{aligned} T_d = & 15,29 + 5,18 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6,7) + \\ & - 0,89 \cdot (6,7 - T_{(1\text{-day})}) + 1,38 \cdot (s\text{Sin}15,5 + 0,655) + \\ & - 9,88 \cdot (-0,65 - s\text{Sin}15,5) + 0,30 \cdot (IR - 16,4) + \\ & - 0,81 \cdot (16,4 - IR) - 0,01 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6,7) \cdot (IR - 15,2) + \\ & - 0,03 \cdot h \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6,7) \cdot (15,2 - IR) + \\ & - 0,71 \cdot h \cdot (T_{(1\text{-day})} - 12,6) - 0,11 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 12,6) \cdot h \cdot (17,1 - IR) + \\ & - 0,48 \cdot (IR - 18,5) \cdot (-0,65 - s\text{Sin}15,5) + \\ & + 1,16 \cdot (18,5 - IR) \cdot (-0,65 - s\text{Sin}15,5) + \\ & + 0,38 \cdot (10,3 - IR) \cdot (s\text{Sin}15,5 + 0,65) - 4,22 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6,2). \end{aligned} \quad (3)$$

Uzyskany model BELLS3_MARS wymagał zastosowania interakcji ($degree = 2$). Wartość $npruned$ oznacza maksymalną liczbę wyrażeń w przyciętych modelu. Jest to charakterystyczny parametr uczenia. Niniejszy model ujął zgodność z danymi eksperymentalnymi na poziomie 87% i jest wyższy o 6% od modelu BELLS3. Ponadto zaobserwowano zmniejszenie błędu predykcji o około $0,4^\circ\text{C}$. Niektóre wyrażenia np.: $5,18 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6,7) + - 0,89 \cdot (6,7 - T_{(1\text{-day})})$ zostały zapisane w postaci funkcji segmentowej, co jest wyrazem efektów nieliniowych

dependent variable in a fairly uncomplicated way [29, 30]. In addition, they allow sanctioning relationships hidden in the data set between predictors, which the classical linear model is unable to do.

The initial analysis used the MARS (*Multivariate Adaptive Regression Splines*) machine learning method, one of the few techniques that allows the model to be obtained in an explicit form, i.e. a mathematical equation. MARS is a non-parametric statistical regression method used in tasks designed for data mining. It allows rapid estimation for modelling complex, non-linear relationships with a large number of independent variables [31]. In the model, non-significant variables are eliminated through a specified threshold value in such a way as to obtain a minimum generalised cross-validation *GCV* error and the maximum value of the coefficient of determination R^2 [32]. The *GCV* error occurring in the model implementation process is calculated based on the classical mean square error (MSE) and takes into account the complexity of the model (C -factor).

After tuning the model, it obtained the following learning and evaluation parameters: $degree = 2$, $npruned = 60$, $RMSE = 1.84^\circ\text{C}$, $R^2 = 87\%$, $GCV = 3.48^\circ\text{C}$, and finally the modified BELLS3_O obtained the explicit form (3).

$$\begin{aligned} T_d = & 15.29 + 5.18 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6.7) + \\ & - 0.89 \cdot (6.7 - T_{(1\text{-day})}) + 1.38 \cdot (s\text{Sin}15.5 + 0.655) + \\ & - 9.88 \cdot (-0.65 - s\text{Sin}15.5) + 0.30 \cdot (IR - 16.4) + \\ & - 0.81 \cdot (16.4 - IR) - 0.01 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6.7) \cdot (IR - 15.2) + \\ & - 0.03 \cdot h \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6.7) \cdot (15.2 - IR) + \\ & - 0.71 \cdot h \cdot (T_{(1\text{-day})} - 12.6) - 0.11 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 12.6) \cdot h \cdot (17.1 - IR) + \\ & - 0.48 \cdot (IR - 18.5) \cdot (-0.65 - s\text{Sin}15.5) + \\ & + 1.16 \cdot (18.5 - IR) \cdot (-0.65 - s\text{Sin}15.5) + \\ & + 0.38 \cdot (10.3 - IR) \cdot (s\text{Sin}15.5 + 0.65) - 4.22 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6.2). \end{aligned} \quad (3)$$

The resulting BELLS3_MARS model required an interaction ($degree = 2$). The value $npruned$ indicates the maximum number of expressions in the trimmed model. This is a characteristic parameter of learning. The present model captured a concordance with experimental data of 87% and is by 6% higher than the BELLS3 model. In addition, a reduction in prediction error of about 0.4°C was observed. Some expressions e.g.: $5.18 \cdot (T_{(1\text{-day})} - 6.7) - 0.89 \cdot (6.7 - T_{(1\text{-day})})$ were written as a segmented function, which is an expression of the non-linear effects present in the dataset. Thus, it confirms the low efficiency of the linear model (2). The occurring 16 expressions

występujących w zbiorze danych. Tym samym potwierdza to niską skuteczność modelu liniowego (2). Występujących 16 wyrażeń stanowi również podstawę do stwierdzenia, że zbiór wejściowy jest dość zróżnicowany pod względem właściwości termicznych. Wspomniana znaczna liczba współczynników eksperymentalnych jest rezultatem uwzględnienia tego efektu.

8. WNIOSKI

Poniżej przedstawiono wnioski z procesu poszukiwania najbardziej efektywnego modelu regresyjnego, umożliwiającego optymalizację istniejącego modelu i jego modyfikację z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Zadanie było utrudnione, ponieważ dane wejściowe w modelu BELLS3 są z założenia skorelowane ze sobą – odnoszą się bowiem do pomiaru wyłącznie temperatury i jej transformacji. Kluczowe wnioski z przeprowadzonej analizy są następujące:

1. Oceniając proces estymacji modelu BELLS3_O można stwierdzić, że jego jakość wzrosła o 1% w stosunku do referencyjnego BELLS3 ($R^2 = 82\%$), natomiast błąd estymacji zmniejszył się o $0,18^\circ\text{C}$ ($RMSE$ w BELLS3 wyniósł $2,30^\circ\text{C}$).
2. Wstępna analiza możliwości zastosowania uczenia maszynowego z wykorzystaniem metody MARS wykazała, że istnieje istotna przestrzeń do zwiększenia jakości predykcji temperatury T_d . Zastosowany model uczenia pozwolił osiągnąć dopasowanie $R^2 = 87\%$ i precyzję o wartości $1,84^\circ\text{C}$.
3. Wskazano, że podwyższenie jakości modelu BELLS3 można osiągnąć poprzez uwzględnienie właściwości temperaturowych warstw z mieszanek mineralno-asfaltowych. Dysponowanie zbiorem danych, który pozwalałby na ocenę takich właściwości jest mało prawdopodobny i bardzo kosztowny.

Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować następujące rekomendacje:

- uzyskane parametry oceny jakościowej przedstawionych rozwiązań uzasadniają możliwość ich stosowania w predykcji temperatury T_d w pomiarach TSD, a jako dane uzupełniające w pomiarach FWD będą istotnie zmniejszać błędy związane z przyjmowaniem temperatur *in-situ* na wszystkie sekcje przed kolejnym pomiarem temperatury,

also provide a basis for concluding that the input set is quite diverse in terms of thermal properties. The significant number of experimental coefficients mentioned is the result of taking this effect into account.

8. CONCLUSIONS

The conclusions of the search process for the most efficient regression model to optimise the existing model and its modification, which was carried out using the least squares method, are presented below. The task was difficult as the input data in the BELLS3 model is by definition correlated – it refers only to the measurement of temperature and its transformation. The key conclusions of the analysis are as follows:

1. Evaluating the estimation process of the BELLS3_O model it can be said that its quality increased by 1% compared to the reference BELLS3 ($R^2 = 82\%$), while the estimation error decreased by 0.18°C ($RMSE$ in BELLS3 was 2.30°C).
2. A preliminary analysis of the applicability of machine learning using the MARS method has shown that there is significant room to increase the quality of T_d temperature prediction. The learning model applied achieved a fit of $R^2 = 87\%$ and precision of 1.84°C .
3. It was pointed out that an increase in the quality of the BELLS3 model can be achieved by taking into account the temperature properties of bituminous mixture layers. Having a dataset to assess such properties is unlikely and very expensive.

Based on the analysis, the following recommendations can be formulated:

- the obtained qualitative evaluation parameters of the presented solutions justify their applicability in the prediction of T_d temperature in TSD measurements, and as supplementary data in FWD measurements, they will significantly reduce the errors associated with applying *in-situ* temperatures to all sections before the next temperature measurement,
- the possibility of using other machine learning models, including hybrid models, should be analysed to achieve a matching quality of more than 90%.

- należy przeanalizować możliwości wykorzystania innych modeli uczenia maszynowego, w tym hybrydowych w celu osiągnięcia jakości dopasowania przekraczającej 90%.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] Sudyka J., Harasim P., Kowalska-Sudyka M., Mechowski T.: Quality control of traffic speed deflector measurements on road network. *Roads and Bridges – Drogi i Mosty*, **20**, 4, 2021, 441-450, DOI: 10.7409/rabdim.021.026
- [2] Deep P., Andersen M.B., Rasmussen S., Marradi A., Thom N.H., Presti D.L.: Simulating deflection of a jointed rigid pavement under rolling wheel deflector (RAPTOR) loading. In: Raab C. (eds) *Proceedings of the 9th International Conference on Maintenance and Rehabilitation of Pavements – Mairepav9*. Lecture Notes in Civil Engineering, Springer, Cham, **76**, 2020, 859-870, DOI: 10.1007/978-3-030-48679-2_80
- [3] Zofka A., Sudyka J., Maliszewski M., Harasim P., Sybilski D.: Alternative approach for interpreting traffic speed deflector results. *Journal of the Transportation Research Board*, **2457**, 1, 2014, 12-18, DOI: 10.3141/2457-02
- [4] Graczyk M., Zofka A., Rafa J., Sudyka J.: Analytical solution of pavement deflections and its application to the TSD measurements. *Transport Research International Documentation, Proceedings of 26th ARRB Conference – Research driving efficiency*, Sydney, New South Wales, 2014
- [5] Lukanen E.O., Stubstad R., Briggs R.: Temperature predictions and adjustment factors for asphalt pavement. Turner-Fairbank Highway Research Center, Publication no. FHWA-RD-98-085, McLean, VA, USA, 2000
- [6] Gedafa D.S., Hossain M., Romanoschi S.A.: Perpetual pavement temperature prediction model. *Road Materials and Pavement Design*, **15**, 1, 2014, 55-65, DOI: 10.1080/14680629.2013.852610
- [7] Alavi M.Z., Pouranian M.R., Hajj E.Y.: Prediction of asphalt pavement temperature profile with finite control volume method. *Journal of the Transportation Research Board*, **2456**, 1, 2014, 96-106, DOI: 10.3141/2456-10
- [8] Ntramah S., Tutu K., Tuffour Y., Adams C.A., Adanu E.: Evaluation of selected empirical models for asphalt pavement temperature prediction in tropical climate: The case of Ghana. *Sustainability*, **15**, 22, 2023, Article ID: 15846, DOI: 10.3390/su152215846
- [9] Sedighian-Fard M., Solatifar N.: Development of a non-linear regression-based model for prediction of depth temperature of asphalt layers using LTPP data – case study: Ohio, USA. *Transportation Engineering Quarterly*, **13**, 3, Serial No. 52, 2022, 1587-1600, DOI: 10.22119/jte.2021.217101.2426
- [10] Diefenderfer B.K., Al-Qadi I.L., Diefenderfer S.D.: Model to predict pavement temperature profile: development and validation. *Journal of Transportation Engineering*, **132**, 2, 2006, 162-167, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(2006)132:2(162)
- [11] Minhoto M.J.C., Pais J.C., Pereira P.A.A., Picado-Santos L.G.: Predicting asphalt pavement temperature with a three-dimensional finite element method. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, **1919**, 1, 2005, 96-110, DOI: 10.1177/0361198105191900111
- [12] Hermansson Å.: Mathematical model for calculation of pavement temperatures: comparison of calculated and measured temperatures. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, **1764**, 1, 2001, 180-188, DOI: 10.3141/1764-19
- [13] Lekea A., Steyn W.J.vdM.: Performance of pavement temperature prediction Models. *Applied Sciences*, **13**, 7, 2023, Article ID: 4164, DOI: 10.3390/app13074164
- [14] Khroustalev B.M., Liu Tingguo, Akeliev V.D., Li Zhongyu, Aliakseyeu H.Yu., Zankavich V.V.: Heat resistance and heat-and-mass transfer in road pavements. *ENERGETIKA, Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, **62**, 6, 2019, 536-546, DOI: 10.21122/1029-7448-2019-62-6-536-546 (in Russian)
- [15] Mohseni O., Stefan H.G.: A monthly streamflow model. *Water Resources Research*, **34**, 5, 1998, 1287-1298, DOI: 10.1029/97WR02944
- [16] Gu X., Liang X., Dong Q.: Numerical simulation of long-term pavement temperature field. *Proceedings of GeoShanghai 2018 International Conference: Transportation Geotechnics and Pavement Engineering*. Springer, Singapore, 2018
- [17] Yavuzturk C., Ksaibati K., Chiasso A.D.: Assessment of temperature fluctuations in asphalt pavement due to thermal environmental conditions using a two-dimensional, transient finite-difference approach. *Journal of Materials in Civil Engineering*, **17**, 4, 2005, 465-475, DOI: 10.1061/(ASCE)0899-1561(2005)17:4(465)
- [18] Zhang N., Wu G., Chen B., Cao C.: Numerical model for calculating the unstable state temperature in asphalt pavement structure. *Coatings*, **9**, 4, 2019, Article ID: 271, DOI: 10.3390/coatings9040271q

- [19] *Adwan I., Milad A., Abdullah N.H., Widyatmoko I., Mubarak M., Mat Yazid M.R., Yusoff N.I.M.*: Predicting asphalt pavement temperature by using neural network and multiple linear regression approach in the Eastern Mediterranean region. *Journal of Engineering Science and Technology*, **17**, 1, 2022, 15-32
- [20] *Wang X., Zhao J., Li Q., Fang N., Wang P., Ding L., Li S.*: A hybrid model for prediction in asphalt pavement performance based on support vector machine and grey relation analysis. *Journal of Advanced Transportation*, 1, 2020, Article ID: 7534970, DOI: 10.1155/2020/7534970
- [21] Zarządzenie nr 21 Generalnego Dyrektora Dróg Krajowych i Autostrad z dnia 17 czerwca 2019 roku w sprawie diagnostyki stanu nawierzchni i wybranych elementów korpusu drogi (in Polish)
- [22] *Solatifar N., Abbasghorbani M., Kavussi A., Sivilevičius H.*: Prediction of depth temperature of asphalt layers in hot climate area. *Journal of Civil Engineering and Management*, **24**, 7, 2018, 516-525, DOI: 10.3846/jcem.2018.6162
- [23] Dynatest International A/S. *ELMOD user's manual (ELMOD5)* Dynatest Engineering A/S, A/S Reg. No. 63.866 Denmark, 2014
- [24] *Stanisz A., Tadeusiewicz R.*: Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny. StatSoft, **2**, Kraków 2007 (in Polish)
- [25] *Jańczewski D., Różycki C., Synoradzki L.*: Projektowanie procesów technologicznych: matematyczne metody planowania eksperymentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2010 (in Polish)
- [26] *Nwanganga F., Chapple M.*: Practical machine learning in R, 1st ed. John Wiley and Sons, Indianapolis, 2020
- [27] *Box G.E.P., Cox D.R.*: An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **26**, 2, 1964, 211-252
- [28] *Lander J.P., Włodarz M.*: R dla każdego: zaawansowane analizy i grafika statystyczna. In: *Dane i Analizy. APN Promise*, Warszawa, 2018 (in Polish)
- [29] *Chollet F., Allaire J.J.*: Deep Learning: praca z językiem R i biblioteką Keras. Helion, Gliwice, 2019 (in Polish)
- [30] *Rigabadi A., Rezaei Zadeh Herozi M., Rezagholilou A.*: An attempt for development of pavements temperature prediction models based on remote sensing data and artificial neural network. *International Journal of Pavement Engineering*, **23**, 9, 2021, 2912–2921, DOI: 10.1080/10298436.2021.1873334
- [31] *McShane S.L., Glinow M.A.V., Sharma R.R.*: Organizational behavior: emerging knowledge and practice for the real world. Tata McGraw Hill, New Delhi, 2011
- [32] *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.H.*: The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction, 2nd ed. in Springer series in statistics. Springer, New York, NY, 2009