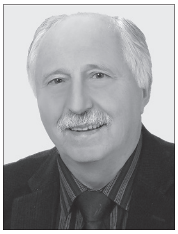


CZESŁAW MACHELSKI[1)]
ORCID: 0000-0002-1215-7908

BARTOSZ PISAREK[2)]
ORCID: 0009-0008-8337-8506

STATIC CHARACTERISTICS OF CANTILEVER BRIDGES

CHARAKTERYSTYKI STATYCZNE MOSTÓW WYBUDOWANYCH METODĄ WSPORNIKOWĄ

STRESZCZENIE. W artykule rozpatruje się dwa parametry – sztywność i podatność – jako statyczne charakterystyki konstrukcji mostowych. Sztywność jest określana jako skutek obciążenia zmiennego. Jest ona związana z charakterystyką dynamiczną mostów. Odwrotnością sztywności jest podatność. Podatność jako funkcja czasu służy do analizy procesów reologicznych, w tym degradacji konstrukcji. Dzięki analizie związku tych wielkości utworzono algorytm szacowania podatności na podstawie sztywności obiektu, jako że jej wartość jest łatwiejsza do uzyskania. W pracy przedstawiono analizy oparte na modelach obliczeniowych mostów wspornikowych. Wyniki analiz mogą być wykorzystane do innych rodzajów mostów, również o małych i średnich rozpiętościach, w tym o zmiennej wysokości.

SŁOWA KLUCZOWE: analizy statyczne, modele obliczeniowe, mosty wspornikowe, sztywność i podatność.

ABSTRACT. In the paper, two parameters – stiffness and flexibility – are considered as static characteristics of bridge structures. Stiffness is referred to as the effect of variable load. It is related to the dynamic characteristics of bridges. Flexibility is the inverse of stiffness. Flexibility as a function of time is used to analyze rheological processes, including structural degradation. Owing to the analysis of the relationship between these quantities, an algorithm was created for estimating flexibility based on the stiffness of the object, since the latter value is easier to obtain. In this work, analyses based on computational models of cantilever bridges were performed. The results can be used for other types of bridges, including those with small and medium spans and variable height.

KEYWORDS: calculation models, cantilever bridges, static analysis, stiffness and flexibility.

DOI: 10.7409/rabdim.024.010

1) Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Wybrzeże Stanisława Wyspiańskiego 41, 50-370 Wrocław; czeslaw.machelski@pwr.edu.pl (✉)
2) Wayss & Freytag Ingenieurbau AG, Eschborner Landstraße 130-132, 60489 Frankfurt am Main; bartus.pisarek@gmail.com

1. WPROWADZENIE

Tematem pracy jest analiza dwóch podstawowych charakterystyk statycznych konstrukcji mostowych: sztywności i podatności. Definicję sztywności wykorzystano do określenia wpływu obciążenia krótkotrwałego pochodzącego od pojazdu zmieniającego swoje położenie wzdłuż osi mostu [1]. W pracy [2] wskazano na zależność sztywności od częstości drgań własnych pierwszej, giętnej formy deformacji. Obydwie wielkości analizowano jako funkcje rozpiętości przęsła. Stąd w pracach [1-3] wskazano na istotną zależność pomiędzy sztywnością a charakterystyką dynamiczną mostów. Sztywności uzyskane w pracy z obliczeń mostów betonowych o największych rozpiętościach są uzupełnieniem dotychczasowych rezultatów badań mostów o małej i średniej rozpiętości [1, 2].

Definicję podatności wykorzystano do określenia wpływu obciążenia stałego – ciężaru własnego konstrukcji oraz wyposażenia (nawierzchni jezdni i chodników) – i jego długotrwałego oddziaływania na konstrukcję. Takie ujęcie podatności pozwala na analizę procesów długotrwałych, w tym reologicznych [4-9]. W przypadku mostów z betonu naturalne deformacje wynikają ze zmian cech fizycznych betonu, ujętych w jego module ściśliwości, pełzaniu oraz skurczu. W przypadku obciążeń długotrwałych istotne znaczenie ma pełzanie betonu [4, 5, 7]. W obszernym opracowaniu [9] wykonano analizę wpływu zmiany cech fizycznych betonu na ugięcia w funkcji czasu na przykładzie mostów o dużej (ok. 200 m) i rekordowej (ok. 300 m) rozpiętości, wybudowanych w Norwegii z zastosowaniem technologii wspornikowej. W tym przypadku danymi do analizy numerycznej były wyniki bezpośrednich pomiarów obiektu.

Odrębnym celem analizy podatności jest określenie wpływu zmiany parametrów geometrycznych przęseł na ich deformację. W pracach [3, 5, 6] wskazano na schemat statyczny konstrukcji jako istotny czynnik wpływający na kształt linii ugięcia pochodzącej od obciążenia równomiernie rozłożonego. Ten zakres obliczeń rozwinięto w niniejszym artykule. Wskazano na związek sztywności z podatnością mostów z wykorzystaniem badania linii ugięcia powstałej podczas przejazdu samochodu.

Istotny wpływ na zmianę podatności w czasie mają straty sprężenia i destrukcja (zarysowanie betonu) jako czynniki o cechach losowych. Zaproponowano, aby je uwzględnić jako dane z monitoringu, a więc z uwzględnieniem rze-

1. INTRODUCTION

The presented work is devoted to the two basic static characteristics of bridge structures: stiffness and flexibility. Definition of stiffness was used to determine the influence of a live load comprising a vehicle moving along the bridge [1]. The authors of [2] pointed out the relationship between the structure's stiffness and the frequency of its first bending mode. Both quantities have been analyzed as functions of the span length. Therefore, the works [1-3] indicated a strong relationship between stiffness and dynamic characteristics of bridges. Values of stiffness calculated in the work for concrete bridges with greatest spans supplement the results of previous studies of short- and medium-span bridges [1, 2].

Definition of flexibility was used for determination of the influence of dead loads – self-weight of the structure and equipment (including pavement structures of the roadways and sidewalks) – and their long-term effect on the structure. Such approach to flexibility enables analysis of long-term processes, including rheology [4-9]. In the case of concrete bridges, natural deformations result from changes in physical properties of concrete, as described by compressive modulus, creep and shrinkage. In the case of long-term loads, concrete creep is a significant effect [4, 5, 7]. An extensive Norwegian study [9] included analysis of the influence of changes in concrete physical properties on deflections in time, using the example of bridges with high (around 200 m) and record (around 300 m) span lengths built in Norway using cantilever concreting technology. In this study, numerical analyses were based on data obtained in direct measurements conducted on structures.

A separate aim of flexibility analyses is to determine the effect that the changes in geometric parameters of spans have on their deformation. Works [3, 5, 6] demonstrated that the static scheme of the structure is a significant factor affecting the shape of the deflection curve generated by uniformly distributed load. These calculations are further developed herein. A relationship between bridge stiffness and flexibility was demonstrated using analysis of the deflection curve obtained during the passage of a vehicle.

Changes of flexibility in time are significantly affected by such random factors as loss of prestressing or damage (cracking of concrete). It has been proposed to incorporate such factors as data from bridge monitoring, which reflect czywistego stanu obiektu. W pracach [5, 6] wskazano, że istotny wpływ na zmiany niwelety mostu ma technologia budowy obiektu. Zatem każdy z rodzajów konstrukcji należy rozpatrywać indywidualnie – w tym mosty budowane z zastosowaniem technologii wspornikowej (nawisowej), które opisano w niniejszej pracy.

2. MODELE MOSTÓW

Tematem pracy jest analiza sztywności i podatności mostów betonowych o największych rozpiętościach [5, 9-11]. Klasycznie ukształtowany układ konstrukcyjny dźwigara o przekroju skrzynkowym i zmiennej wysokości przedstawiono na Rys. 1. Wynika on z technologicznego schematu wspornikowego, jak również z układu obciążeń w fazie budowy [5]. Według [10]: najbardziej ekonomiczne zastosowania technologii nawisowej stanowią obiekty w zakresie rozpiętości 80-150 m. Przekroczenie bariery 200 m powoduje radykalne zwiększenie zużycia materiałów.

the actual condition of the structure. Works [5, 6] indicated that construction technology significantly affects the changes in vertical alignment of the bridge. Therefore, each structure type should be analyzed individually – also the concrete bridges constructed using cantilever concreting technology, which are the subject of this work.

2. BRIDGE MODELS

The work is focused on stiffness and flexibility of concrete bridges with the longest spans [5, 9-11]. A classic structural system of a box girder with variable depth is shown in Fig. 1. Such geometry results from the cantilever building technology and from the distribution of loads in the construction phase [5]. According to [10]: the most economical applications of the cantilever construction technology include structures with span lengths within the range of 80-150 m. Beyond the limit of 200 m, material usage increases drastically.

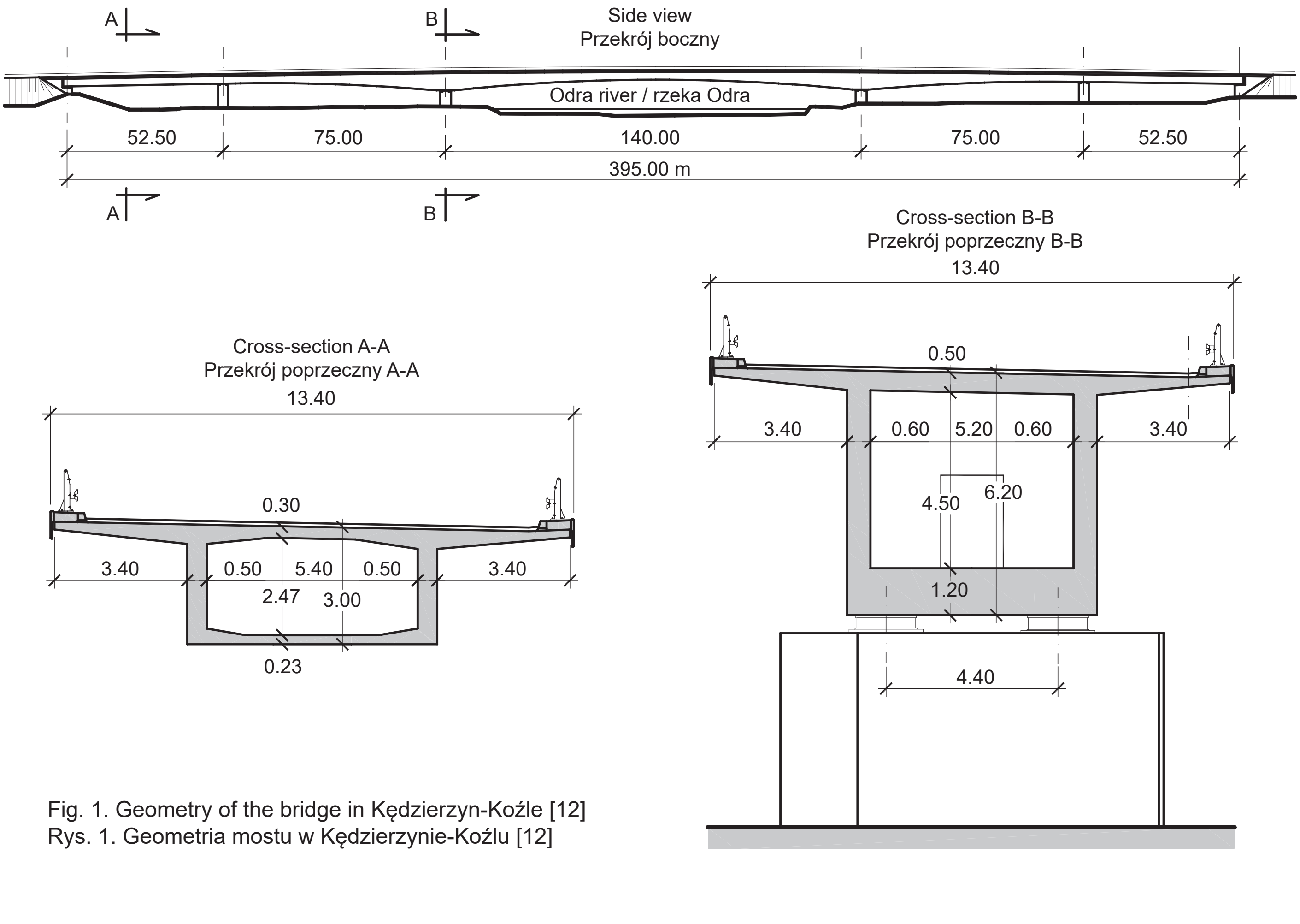

Fig. 1. Geometry of the bridge in Kędzierzyn-Koźle [12]
Rys. 1. Geometria mostu w Kędzierzynie-Koźlu [12]

Do analizy statycznej wykorzystano schemat belki wieloprzęsłowej [13]. Do obliczeń przyjęto konstrukcje o zmiennej sztywności *EI*, utworzone z dwóch symetrycznych części, przedstawionych na Rys. 2, 3 i 4. Obciążeniem przyjętym do analizy sztywności jest siła skupiona *P*, a do analizy podatności – obciążenie równomiernie rozłożone na całej długości mostu o intensywności *q*.

Static analyses were performed using multi-span beam schemes [13]. Calculations were made for structures with variable stiffness *EI,* characterized by symmetry about the vertical axis, as shown in Fig. 2, 3 and 4. Stiffness was analyzed using a concentrated load *P*, while flexibility was analyzed using a uniformly distributed load with constant intensity *q*.

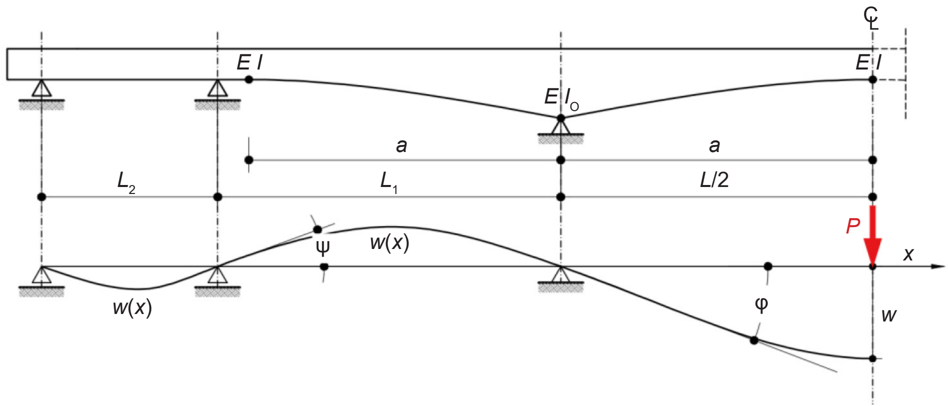

Fig. 2. Static scheme and deflection curve of a 5-span bridge used in stiffness calculations
Rys. 2. Schemat i linia ugięcia mostu 5-przęsłowego zastosowane do określania sztywności

Wynikiem obliczeń w obydwu przypadkach jest *w*, czyli ugięcie w środku rozpiętości przęsła głównego o rozpiętości *L*. Dodatkowo, jako uogólnione przemieszczenia, przyjęto kąty obrotu przekrojów podporowych φ i ψ. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach uwzględnia się zmianę wysokości przęsła, ujętą w modelu jako funkcję zmiany momentu bezwładności *I*(*x*) z minimalną wartością w środku rozpiętości przęsła głównego (oznaczoną jako *I*) oraz maksymalną wartością nad podporą I_o.

Na wartość ugięcia *w* istotnie wpływa układ konstrukcyjny mostu, przęsła głównego i przęseł do niego przyległych. W schematach wieloprzęsłowych udział wpływu pozostałych przęseł na wartość *w* jest ograniczony. Stąd w pracy rozpatruje się schematy o małej liczbie przęseł, a każdy przypadek geometrii mostu analizowany jest indywidualnie.

W przypadku analizy podatności obciążenie stałe uwzględniono jako siłę równomiernie rozłożoną o intensywności *q*, jak na Rys. 3 i 4, która jest modelem ciężaru własnego konstrukcji oraz wyposażenia (nawierzchni jezdni i chodników). Również w tym przypadku stosuje się wykorzystywany wcześniej model obliczeniowy, który uwzględnia następujące przemieszczenia: ugięcie *w* oraz trzy kąty obrotu – nad podporami φ i ψ oraz w środku rozpiętości przęsła głównego [13].

In both cases calculations provide the value *w*, that is the deflection in the middle of the main span, whose length is *L*. Additionally, inclination angles of the support cross-sections φ and ψ were adopted as generalized displacements. In all the analyzed cases, the changes in cross-section height were incorporated in the model as changes in the moment of inertia *I*(*x*), with the minimum value occurring in the middle of the main span (designated as *I*) and the maximum value occurring over the pier I_o.

The value of deflection *w* is significantly affected by the structural scheme, including the geometry of the main span and adjacent spans. In multi-span systems the influence of other spans on *w* is limited. Therefore, systems with low number of spans are considered in this study and each case of bridge geometry is analyzed individually.

In the case of flexibility analyses, dead load was incorporated as a uniformly distributed load with constant intensity *q*, as shown in Fig. 3 and 4. The distributed load represents the self-weight of the structure and equipment (including pavement structures of the roadways and sidewalks). The previous calculation model is used also in this case; it includes the following displacements: deflection *w* and three inclination angles – at the support cross-sections φ and ψ and in the middle of the main span [13].

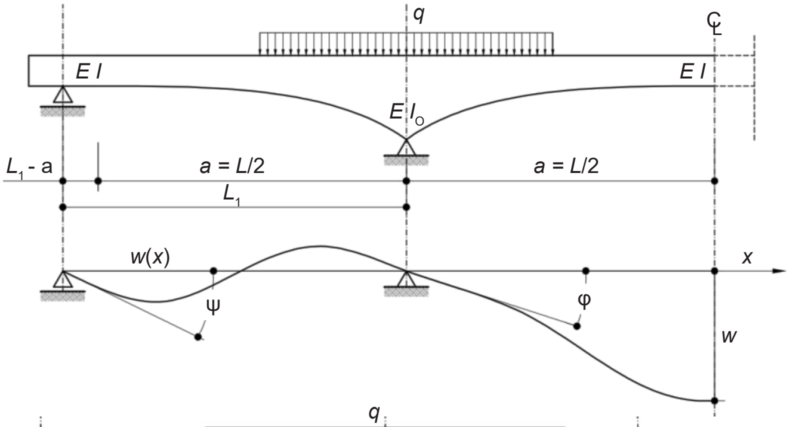

Fig. 3. Static scheme and deflection curve of a 3-span bridge used in flexibility calculations
Rys. 3. Schemat i linia ugięcia mostu 3-przęsłowego zastosowane do określania podatności

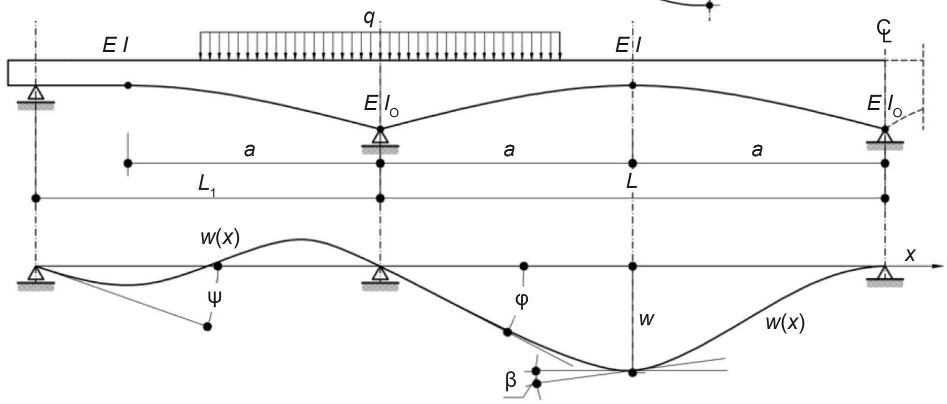

Fig. 4. Static scheme and deflection curve of a 4-span bridge used in flexibility calculations
Rys. 4. Schemat i linia ugięcia mostu 4-przęsłowego zastosowane do określania podatności

W zastosowaniach praktycznych występują również konstrukcje o dwóch i więcej przęsłach wykonanych w technologii wspornikowej o rozpiętości L. Wówczas w schemacie statycznym rozpatruje się symetrię względem osi środkowej podpory z postacią przemieszczeń przedstawioną na Rys. 4. Do tak sformułowanego układu przęseł stosuje się model obliczeniowy wykorzystywany wcześniej z dodatkowym kątem β w środku rozpiętości przęsła głównego.

3. FUNKCJE ZMIANY MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI

Rozpatrywane konstrukcje mostów mogą być realizowane z zastosowaniem różnych technologii, np. betonowania na pełnym rusztowaniu lub nasuwania podłużnego [12]. Na kształt dolnej linii konstrukcji przęsła ma wpływ wiele czynników, w tym estetyka mostu i rodzaj materiału (beton zbrojony lub sprężony). W przypadku mostów betonowych dużych rozpiętości na proporcje wysokości przekrojów ma również wpływ rozpiętość przęsła głównego L [12]. Zwykle w mostach budowanych z zastosowaniem technologii wspornikowej przyjmuje się minimalną wysokość przęsła jako niezależną od rozpiętości na poziomie $h \approx 3$ m (Rys. 1). W pracy zmiana wysokości

In practical applications, there are also structures with two (or more) spans constructed in cantilever technology, both with the span length of L. In such cases their static schemes include symmetry about the vertical axis of the middle pier, with displacement form shown in Fig. 4. The aforementioned calculation model is applied to such span layout as well, using the additional angle β in the middle of the main span.

3. FUNCTIONS REFLECTING THE CHANGES IN THE MOMENT OF INERTIA

The analyzed bridge structures may be constructed using various technologies, e.g. by concreting on full falsework or incremental launching [12]. The shape of the bottom surface of the span is affected by multiple factors, including bridge aesthetics and material type (reinforced concrete or prestressed concrete). In the case of concrete bridges with long spans, the proportions of cross-sections are also influenced by the length of the main span L [12]. In bridges constructed using the cantilever technology, the minimum depth of the cross-section is usually adopted regardless of the span length as $h \approx 3$ m (Fig. 1). In this work, the changing cross-section depth is expressed by przekroju jest opisana funkcją paraboliczną o wartości maksymalnej (nad podporą) h_o, jak we wzorze:

$$h(x) = h + (h_o - h)\alpha^2 , \tag{1}$$

w którym α jest bezwymiarową współrzędną położenia przekroju

$$\alpha = \frac{x}{a} . \tag{2}$$

Przyjęto zmianę sztywności przęsła na zginanie w postaci paraboli, której kształt uzależniony jest od ilorazu:

$$n = \frac{EI_o}{EI} = \frac{I_o}{I} , \tag{3}$$

gdzie EI_o jest wartością nad podporą przęsła głównego, zaś EI – w połowie rozpiętości przęsła pomiędzy podporami (również w przyległych przęsłach o stałej wysokości). Z uwagi na prosty schemat statyczny w obliczeniach wykorzystano symetrię konstrukcji i klasyczne rozwiązania metody przemieszczeń [13].

W obliczeniach współczynników sztywności [13] przyjęto zmiany momentów bezwładności w postaci funkcji

$$I(x) = I[1 + (\sqrt[3]{n} - 1) \cdot \alpha^2]^3 , \tag{4}$$

gdzie n jest ilorazem sztywności na zginanie przekroju przęsłowego i podporowego (3). Na Rys. 5 przedstawiono funkcję $I(x)/I$ w przypadku, gdy $n = 8$ oraz $n = 9$. Wykresy te odniesiono do wyników określonych na podstawie geometrii przekroju poprzecznego mostu przedstawionego na Rys. 1. Z porównania wykresów widoczne jest dobre dopasowanie tych funkcji, gdy n przyjmuje wartość pośrednią.

We wzorze (3) przyjęto jako stały moduł Younga E na całej długości mostu. W trakcie budowy wartości $E(t)$ są zróżnicowane z uwagi na czas t powstania segmentów. W wybudowanej konstrukcji są one w zasadzie zbliżone. W praktyce, gdy osiągane są maksymalne rozpiętości mostów, stosuje się w części środkowej przęsła głównego beton lekki [9], a czasem również konstrukcje zespolone [12]. Zatem ogólniejszym ujęciem parametru n jest proporcja sztywności, a nie tylko momentów bezwładności.

a parabolic function with the maximum value (above pier) of h_o, as in equation:

$$h(x) = h + (h_o - h)\alpha^2 , \tag{1}$$

where α is a dimensionless coordinate of the cross-section

$$\alpha = \frac{x}{a} . \tag{2}$$

The change in cross-section bending stiffness along the span was adopted as parabolic and related to the ratio:

$$n = \frac{EI_o}{EI} = \frac{I_o}{I} , \tag{3}$$

where EI_o is the value above the support of the main span and EI is the value in the middle of the span (also in adjacent spans with constant height). Owing to the simple static scheme, calculations were based on the symmetry of the structure and the classic solutions of the displacement method [13].

Stiffness coefficient calculations [13] employed the following function expressing the changes in the moment of inertia:

$$I(x) = I[1 + (\sqrt[3]{n} - 1) \cdot \alpha^2]^3 , \tag{4}$$

where n is the aforementioned ratio between bending stiffness of the support and mid-span sections (3). Fig. 5 shows the function $I(x)/I$ in the cases when $n = 8$ and $n = 9$. The two plots are presented alongside the results based on the actual geometry of the bridge shown in Fig. 1. The plots indicate good fit of the real results and the functions when an intermediate n value is used.

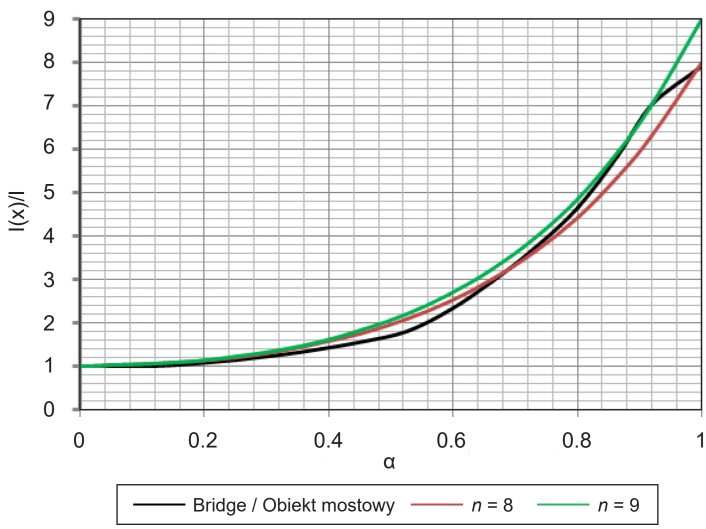

Fig. 5. The change in the moment of inertia along the span for different values of *n*
Rys. 5. Kształty funkcji zmiany momentów bezwładności zależne od ilorazu *n*

4. SZTYWNOŚĆ MOSTU

Sztywność mostu [1, 3] jest ogólną charakterystyką konstrukcji definiowaną jako

$$k = \frac{P}{w} \quad \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right], \tag{5}$$

gdzie P jest obciążeniem mostu w postaci pojedynczej siły skupionej, wywołującej maksymalne ugięcie przęsła $w = w_{max}$. Wobec tego położenie siły P na jezdni mostu jest takie, aby ugięcie przęsła było jak największe. Zwykle powstaje ono, gdy siła P (np. ciężar samochodu) znajduje się w środku rozpiętości (w układzie wieloprzęsłowym, w przęśle o największej rozpiętości), jak na Rys. 2. W konstrukcjach o małych rozpiętościach, np. płytowo-belkowych i wieloprzęsłowych, przy wyznaczaniu k korzysta się z powierzchni wpływu ugięcia i jej maksymalnej rzędnej η [1].

Definicję sztywności (5) wykorzystano do opisu wpływu obciążeń ruchomych. Na Rys. 6 przedstawiono wyniki badań około 100 mostów wybudowanych w Szwajcarii [1-3]. Badano mosty o zróżnicowanej konstrukcji, schematach statycznych i technologii budowy. Na tym rysunku wyróżniono dwie grupy mostów z uwagi na materiał użyty do ich budowy: betonowe i zespolone. Jak widać, sztywności mostów betonowych są ok. 2,5 raza większe od sztywności przęseł zespolonych [6]. Wzrost rozpiętości przęsła L powoduje zmniejszenie jego sztywności. W niniejszej pracy rozszerzono zakres analizy na mosty betonowe o największych rozpiętościach, a więc przekraczające rozpiętość 100 m.

It was assumed in equation (3) that the Young modulus E is constant along the entire bridge. However, during the construction phase $E(t)$ varies due to the time of creation of particular segments t. When the structure is finished, its E values are generally similar. In practice, when maximum span lengths are reached, mid-segments of the main span may be constructed using lightweight concrete [9] or composite sections [12]. Therefore, a more general expression of the parameter n would be the one based on the bending stiffness and not only on the moment of inertia.

4. BRIDGE STIFFNESS

Stiffness [1, 3] is a general characteristic of the structure, defined as:

$$k = \frac{P}{w} \quad \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right], \tag{5}$$

where P is the loading of the bridge in the form of a single concentrated force, resulting in the maximum deflection of the span $w = w_{max}$. Therefore, the location of the P force on the roadway is taken to generate the greatest span deflection. Usually this is achieved when the force P (e.g. vehicle load) is located in the middle of the span (for multi-span systems, in the middle of the longest span), like in Fig. 2. In structures with short spans, e.g. slab-beam bridges and multi-span bridges, k is determined using the deflection influence surface and its maximum ordinate η [1].

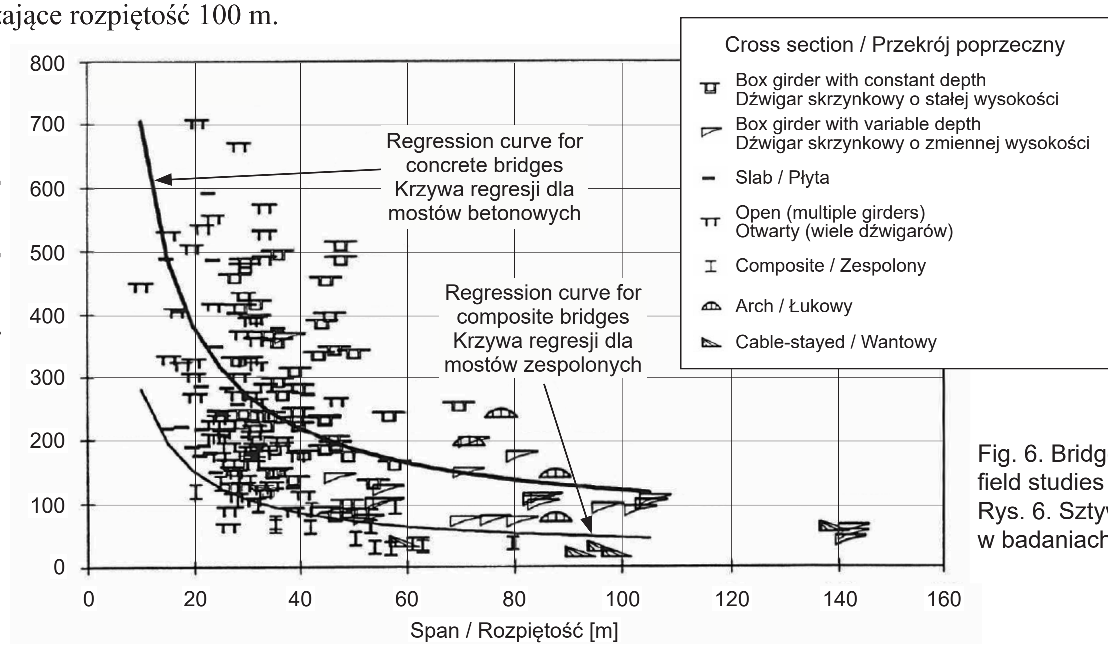

Fig. 6. Bridge stiffness values from field studies [1, 2]
Rys. 6. Sztywności mostów określone w badaniach terenowych [1, 2]

5. ANALIZA PARAMETRYCZNA SZTYWNOŚCI MOSTÓW

Poniżej rozpatruje się przykład konstrukcji mostu 3-przęsłowego (bez przęseł skrajnych o rozpiętości L_2, widocznych na Rys. 2). Założono rozpiętość przęsła skrajnego $L_1 = L/2 = a$. Model statyczny mostu utworzony jest więc z czterech identycznych wsporników (w czasie budowy) o zmiennej wysokości przekroju, z symetrią względem środka rozpiętości przęsła głównego. Zmiennym parametrem w tej analizie jest iloraz sztywności na zginanie w węzłach, podporowym i przęsłowym, określany jako n ze wzoru (3). W modelu obliczeniowym rozpiętość przęsła środkowego L wraz ze sztywnością EI są parametrami rozwiązania [13]. Ugięcie w środku rozpiętości przęsła głównego jest określone wzorem

$$w = \frac{1}{C_p}\frac{PL^3}{EI} \ , \tag{6}$$

gdzie parametr C_P jest współczynnikiem obciążenia krótkotrwałego, z którego po uwzględnieniu (5) otrzymano wzór na sztywność mostu:

$$k = C_P \frac{EI}{L^3} \quad \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right] . \tag{7}$$

W tym ujęciu sztywność k jest charakterystyką mostu; rodzaj obciążenia i schemat statyczny uwzględnia się we współczynniku C_P. W przypadku elementarnego schematu w postaci belki swobodnie podpartej o stałej sztywności otrzymuje się $C_P = 48$, co przyjęto jako wartość odniesienia.

Wykres zmian parametru C_P występującego we wzorach (6) i (7) przedstawiono na Rys. 7. Zakres zmian parametru n obejmuje mosty wybudowane w technologii wspornikowej, a także przęsła o stałym przekroju, np. wykonane jako nasuwane wzdłużnie, gdy $n = 1$. Przypadki pośrednie mogą dotyczyć mostów o innej zmianie wysokości. Na podstawie wykresu (Rys. 7) określono przybliżoną zależność parametru C_P od ilorazu n w mostach 3-przęsłowych

$$C_P \approx 105\sqrt{n} \ . \tag{8}$$

Na Rys. 8 przedstawiono wyniki obliczeń przeprowadzonych dla $n = 25/3$ oraz różnych wartości ilorazu rozpiętości przęseł określanego jako

$$\lambda = \frac{L}{L_1} = 2\frac{a}{L_1} \ . \tag{9}$$

Definition of stiffness (5) was used for the description of the influence of live loads. Fig. 6. presents the results of a study conducted on about 100 bridges in Switzerland [1-3]. The study encompassed bridges of various structural types, static schemes and construction technologies. The two groups visible in the figure were defined according to the material – either concrete or composite bridges. As visible in the chart, stiffness values of concrete bridges are greater by a factor of approx. 2.5 than the values of composite spans [6]. As the length of the span L increases, its stiffness decreases. In this work, the scope of the analysis is extended to include concrete bridges with the longest spans, that is beyond the length of 100 m.

5. PARAMETRIC ANALYSIS OF BRIDGE STIFFNESS

Let us consider a case of a 3-span bridge structure (like the one shown in Fig. 2, but without the outermost L_2 spans). It is assumed that the outer spans adjacent to the main span have the length of $L_1 = L/2 = a$. Therefore, the static model of the bridge (during construction) comprises four identical cantilevers with variable cross-section height, symmetrical about the axis situated in the middle of the main span. The variable parameter in the analysis is n, the ratio of cross-section bending stiffness over the support vs. in mid-span, as defined in equation (3). The solution is obtained for parameters comprising length of the main span L and bending stiffness EI [13]. Deflection in the middle of the main span is expressed by:

$$w = \frac{1}{C_p}\frac{PL^3}{EI} \ , \tag{6}$$

where the C_P parameter is the coefficient of the short-term load. After substituting (5), one obtains the equation for bridge stiffness:

$$k = C_P \frac{EI}{L^3} \quad \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right] . \tag{7}$$

In this approach, stiffness k is a characteristic of the bridge. The type of loading and static scheme is included in coefficient C_P. In the case of the elementary scheme of simply supported beam with constant stiffness $C_P = 48$, which was adopted as the reference value.

Changes of the parameter C_P used in equations (6) and (7) are shown in Fig. 7. The range of n includes bridges constructed using the cantilever technology as well as spans with constant section height, e.g. launched incrementally, Rozpatrzono dwa schematy statyczne mostów: 3- i 5-przęsłowe. W moście 3-przęsłowym o $\lambda < 2$ występuje paraboliczna zmiana wysokości na całej długości mostu z wartością EI_o nad podporą skrajną. Gdy $\lambda = 2$, otrzymuje się wynik przedstawiony na Rys. 7. W przypadku gdy $\lambda > 2$, część przęsła skrajnego o długości a ma zmienną wysokość (jak na Rys. 2), natomiast pozostała część ma stały przekrój poprzeczny. Taka sama zasada stosowana jest w moście 5-przęsłowym (widocznym na Rys. 2). W przęśle skrajnym tego mostu występuje stała wartość EI, a jego rozpiętość spełnia warunek $L_2 = 0{,}7L_1$. Dzięki temu można przedstawić wyniki na jednym rysunku.

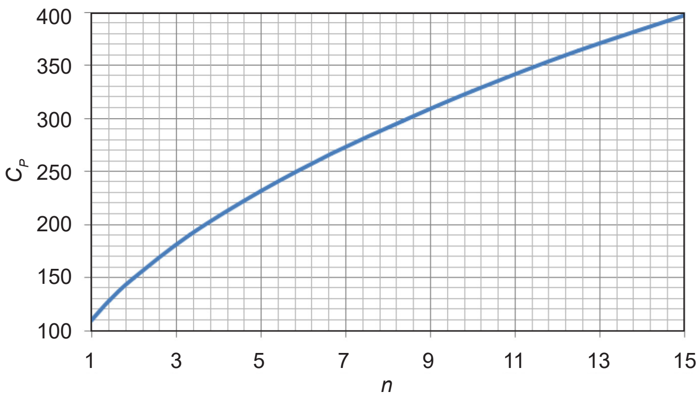

Fig. 7. Values of the C_P coefficient for various values of the *n* ratio in the case of a 3-span bridge
Rys. 7. Wartość współczynnika C_P w zależności od ilorazu sztywności *n* mostu 3-przęsłowego

Na wykresach (Rys. 8) wyróżniono mosty 3- i 5-przęsłowe (jak w legendzie). Przedstawiono wyniki obliczeń parametru C_P uzyskane z ogólnego rozwiązania ujętego we wzorach (6) i (7). Zatem w obu rodzajach mostów sztywność maleje wraz z przyrostem rozpiętości L_1. Sztywności mostów 5-przęsłowych są tylko o 3% większe od sztywności obiektów 3-przęsłowych. W zakresie ilorazu sztywności $8 < n < 15$ zmiany wartości C_P nie przekraczają 1,5% (Rys. 8). Zatem główny wpływ na sztywności obiektów budowanych z zastosowaniem technologii wspornikowej ma iloraz rozpiętości ujęty w wartości λ. W rozpatrywanym zakresie λ występuje zmiana wartości C_P na poziomie 20%.

W praktyce inżynierskiej występują obiekty o bardzo zróżnicowanych parametrach geometrycznych dotyczących rozpiętości, a szczególnie wymiarów przekroju poprzecznego (tak jak na Rys. 1). W Tabl. 1 podano parametry geometryczne obiektów niezbędne do określenia

when $n = 1$. Intermediate cases may reflect bridges with other cross-section height differences. Based on the plot (Fig. 7), the approximate relationship between C_P and n was determined for 3-span bridges:

$$C_P \approx 105\sqrt{n} \quad . \tag{8}$$

Fig. 8 shows the results of calculations performed for $n = 25/3$ and various span length proportions λ, expressed by:

$$\lambda = \frac{L}{L_1} = 2\frac{a}{L_1} \quad . \tag{9}$$

Two static schemes were taken into account: 3-span and 5-span bridges. For the 3-span bridge with $\lambda < 2$, cross-section depth changes parabolically along the length of the span, with value EI_o above the outer support. When $\lambda = 2$, one obtains the results shown in Fig. 7. When $\lambda > 2$, part of the outermost span with the length a has variable cross-section height (like in Fig. 3), while the remaining part of the span has constant height. The same rule applies to the analyzed 5-span bridge (Fig. 2). The outermost span of this bridge has the constant cross-section stiffness value of EI, and its length meets the condition: $L_2 = 0.7L_1$. Owing to this, the results may be presented in one figure.

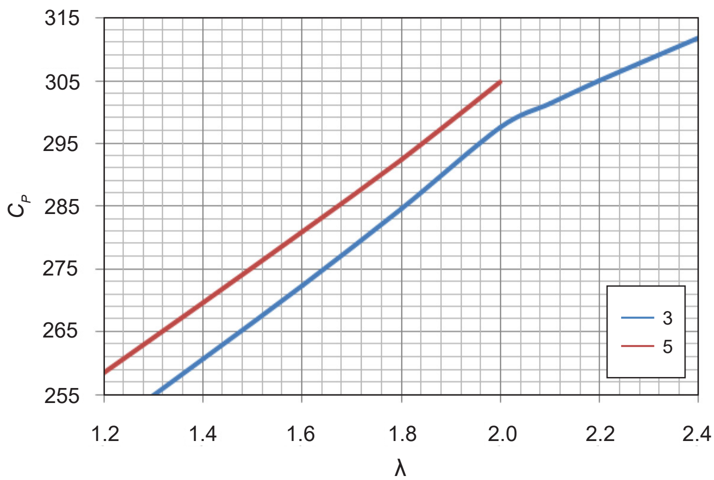

Fig. 8. Values of the C_P coefficient for various span length proportions in 3-span and 5-span bridges
Rys. 8. Wartość współczynnika C_P w zależności od proporcji długości przęseł mostów 3- i 5-przęsłowych

Plots in Fig. 8 show 3-span and 5-span bridges separately (see legend). The presented results of C_P were obtained from the general solution expressed by equations (6) and (7). For both the analyzed types of bridges, stiffness decreases with an increase in the L_1 span length. Stiffness schematu statycznego. Do określenia I i I_o wykorzystano dane projektowe przekrojów poprzecznych krajowych obiektów (Rys. 1) oraz katalogi [14]. Wyniki zestawione w tablicy są rezultatami własnych obliczeń. Gdy w tablicy brak wartości L_2, oznacza to, że obiekt jest 3-przęsłowy. Wielkości w nawiasie to długość przęseł mostu o budowie niesymetrycznej. Istotne znaczenie mają wymiary konstrukcji, a szczególnie szerokość mostu (ujęte w wartościach I, a niewidoczne w parametrach analizowanych obiektów).

values of 5-span bridges are bigger by only 3% than those of 3-span bridges. In the range of $8 < n < 15$, the relative change in C_P does not exceed 1.5% (Fig. 8). Therefore, it is the ratio of span lengths λ that has the primary influence on the stiffness of bridge structures constructed using cantilever technology. Within the analyzed range of λ, the observed relative change in C_P is around 20%.

Table 1. Stiffness of chosen bridges
Tablica 1. Sztywności wybranych mostów

Structure name Nazwa obiektu	Span lengths Rozpiętości przęseł [m]			Moments of inertia of cross-sections Momenty bezwładności przekrojów przęseł [m⁴]		Stiffness of the structure Sztywność obiektu k [MN/m]
	L	L_1	L_2	I	I_o	
Milówka	82	46.0	36.8	6.647	38.89	117.2
Nysa	100	56	40	5.99	79.89	88.0
Łany	120	60	–	9.97	99.28	73.8
Wrocław	126	68.1	–	10.00	101.86	63.2
Ohre	137	72.05	–	11.18	132.3	59.8
Kędzierzyn-Koźle (Fig. 1 / Rys. 1)	140	75	50	11.21	91.01	47.2
Melnik	146.2	72.05	–	8.80	305.4	68.2
Litomerice	151	102 (90)	–	17.8	184.9	62.1
Poncin	155	117 (105)	–	33.15	445.8	117.9
Gennevilliers	169	110 (114)	–	23.88	333.3	67.1
Grudziądz	180	110	–	30.41	460.7	74.2
Viaurvaller	180	130	–	44.93	579.1	98.5
Strasbourg	205	121(131)	–	33.25	266.8	41.5
Støvset	220	100	–	74.54	333.3	62.2
Palau*)	240	96	–	12.29	634.4	15.7

*) structure after the main span was made continuous [16]
konstrukcja po uciągleniu przęsła głównego [16]

Zauważmy, że w przęsłach o mniejszej rozpiętości występują mniejsze wartości $I(L)$ oraz większe sztywności $k(L)$. W wartościach momentów bezwładności istotne znaczenie ma wysokość przekroju poprzecznego, jak również szerokość konstrukcji. Z przyrostem szerokości mostu występuje proporcjonalny wzrost k. Przekłada się to na znaczne rozproszenie wyników uzyskanych z analizy istniejących obiektów. Wyniki z Tabl. 1 są uzupełnieniem wykresu przedstawionego na Rys. 6 w zakresie największych rozpiętości mostów betonowych.

In engineering practice, structures vary mostly in their geometric parameters pertaining to span lengths and cross-section dimensions (Fig. 1). Geometric parameters required for determination of the static scheme are shown in Table 1. Values of I and I_o were determined based on the Polish design data (like in the case shown in Fig. 1) and catalogs [14]. Values shown in the table are the results of the author's own calculations. If the L_2 value is not given, the structure is a 3-span bridge. Span lengths of asymmetric bridges are given in parentheses. Dimensions of each structure, especially its width, are of major

W dalszej części analizy określono sztywność w środku przęsła głównego jako funkcję rozpiętości L [m]:

$$EI(L) = 300 + \frac{(L-100)^2}{10} \tag{10}$$

i na tej podstawie otrzymano wykres sztywności przęseł $k(L)$, przedstawiony na Rys. 9. We wzorze (10) przyjęto $EI = 300$ GNm^2 oraz $L = 100$ m. W obliczeniach przyjęto stałą wartość $n = 10$, stąd dla $\lambda = 2$ otrzymano $C_P = 325$, jak na Rys. 7. Z uwagi na niewielkie różnice wartości C_P w układach 3- i 5-przęsłowych wykres obejmuje całą grupę obiektów. Zatem wyniki podane na Rys. 9 są uzupełnieniem wykresu przedstawionego na Rys. 6. Istotny jest bardzo szybki spadek sztywności k, gdy $L < 130$ m, jak również jej stabilizacja w dalszym zakresie rozpiętości. Widoczne jest to także w wynikach podanych w Tabl. 1.

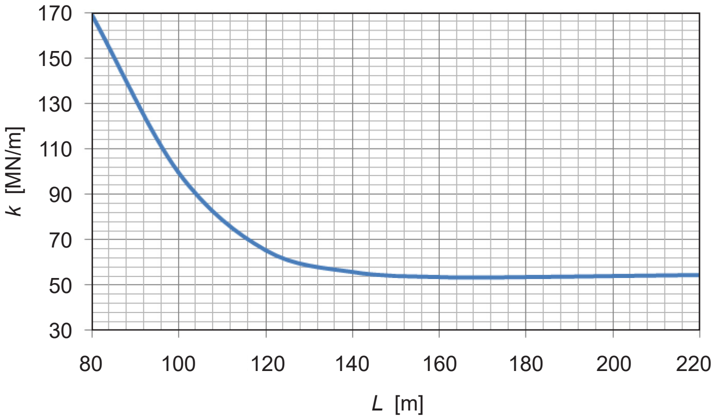

Fig. 9. Stiffness k of the analyzed bridges as function of the length L of the main span
Rys. 9. Sztywność k analizowanych mostów w funkcji rozpiętości L przęsła głównego

6. PODATNOŚĆ DORAŹNA MOSTU

Odwrotnością sztywności konstrukcji jest jej podatność. W rozpatrywanym w pracy zagadnieniu jako obciążenie stałe stosuje się siłę równomiernie rozłożoną o intensywności q, jak na Rys. 3 i 4, wynikającą z ciężaru własnego konstrukcji oraz wyposażenia (nawierzchni jezdni i chodników). W tym przypadku podatność mostu jest wyrażona jako iloraz maksymalnego ugięcia $w = w_{max}$ do obciążenia q, zgodnie z definicją [3] zawartą we wzorze:

$$f = \frac{w}{q} \quad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{11}$$

Poniżej rozpatruje się przykład mostu o schemacie statycznym przedstawionym na Rys. 3. Ze względu na sy-

importance (they are not listed directly, but they are included in the values of I).

It is noteworthy that shorter spans display lower values of $I(L)$ and bigger stiffness $k(L)$. Moments of inertia are significantly influenced by cross-section height and width. The value of k is proportional to the width of the bridge. This fact leads to the considerable scatter observed in the values obtained from the analyses of existing structures. Results shown in Table 1 complement the plot shown in Fig. 6 by supplementing data in the range of the greatest concrete span lengths.

In further analyses, cross-section stiffness in the middle of the main span was expressed as a function of span length L [m]:

$$EI(L) = 300 + \frac{(L-100)^2}{10} \tag{10}$$

and subsequently used to plot span stiffness $k(L)$, as shown in Fig. 9. The values of $EI = 300$ GNm^2 and $L = 100$ m were assumed in (10). A constant value of $n = 10$ was assumed in the calculations, therefore, when $\lambda = 2$, the value $C_P = 325$ was obtained, like in Fig. 7. Due to small differences in C_P between 3-span and 5-span systems (as seen in Fig. 8), the plot includes all the analyzed structures. Results shown in Fig. 9 complement the plot shown in Fig. 6. Importantly, stiffness k decreases rapidly when $L < 130$ m and stabilizes for greater span lengths. This is also noticeable in the results given in Table 1.

6. BRIDGE FLEXIBILITY

Flexibility of the structure is the inverse of its stiffness. In the problem analyzed herein, structure is subjected to uniformly distributed dead load q, as shown in Figs. 3 and 4, comprising self-weight of the structure and its equipment (including sidewalk and roadway pavements). In this case flexibility of the bridge is expressed as the ratio of the maximum deflection $w = w_{max}$ to the load q, according to the definition [3] given in equation:

$$f = \frac{w}{q} \quad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{11}$$

The following analysis will pertain to a bridge with the static scheme shown in Fig. 3. Due to its symmetry, half of the structure is analyzed. Parametric solution is applied, like in the case of stiffness. Displacements include: deflection w and two rotation angles over the supports φ and ψ. Deflection in the middle of the main span equals metrię do obliczeń przyjęto połowę konstrukcji. Podobnie jak w przypadku sztywności, zastosowano rozwiązanie parametryczne. Przemieszczeniami są: ugięcie w oraz dwa kąty obrotu nad podporami φ i ψ. Ugięcie w środku rozpiętości przęsła głównego wynosi

$$f = \frac{1}{C_q}\frac{qL^4}{EI}\ , \tag{12}$$

skąd wyznaczono doraźną podatność

$$f = \frac{1}{C_q}\frac{L^4}{EI}\quad\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{13}$$

W obydwu charakterystykach (w oraz f) występują części stałe: rozpiętość przęsła głównego L i sztywność w środku rozpiętości EI, jak na Rys. 3. We wzorach (7) i (13) sztywność i podatność doraźna mostu nie zależą od intensywności obciążeń P i q. Zatem ogólnym rozwiązaniem (13) jest parametr C_q jako wielkość charakterystyczna konstrukcji. W przypadku elementarnego schematu w postaci belki swobodnie podpartej o stałej sztywności otrzymuje się wartość odniesienia:

$$C_q = \frac{384}{5} = 76{,}8\ . \tag{14}$$

7. ANALIZA PARAMETRYCZNA PODATNOŚCI

Poniżej rozpatrzono szczególny przypadek konstrukcji mostu 3-przęsłowego, przedstawionego na Rys. 3. W obliczeniach założono rozpiętość przęsła skrajnego określonego współczynnikiem λ = 2. Zmiennym parametrem jest w tej analizie iloraz sztywności na zginanie n, jak we wzorze (3). Na Rys. 10 przedstawiono wyniki obliczeń w postaci parametru C_q ujętego we wzorach (12) i (13). Zakres zmian parametru n obejmuje mosty wybudowane jako wspornikowe, a także obiekty o stałym przekroju, np. wykonane w technologii nasuwania wzdłużnego, gdy n = 1. Przypadki pośrednie mogą dotyczyć dowolnych mostów.

W szczególnym przypadku belki trzyprzęsłowej o stałym momencie bezwładności, n = 1, uzyskuje się

$$w = \frac{13}{3072}\cdot\frac{qL^4}{EI}\ . \tag{15}$$

W przypadku przęseł o zmiennej wysokości uzyskuje się znacznie mniejszą wartość, np. gdy n = 8:

$$f = \frac{1}{C_q}\frac{qL^4}{EI}\ , \tag{12}$$

therefore, current flexibility may be expressed as

$$f = \frac{1}{C_q}\frac{L^4}{EI}\quad\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{13}$$

Both the analyzed characteristics (w and f) include constant values: main span length L and stiffness in the middle of the span EI, like in Fig. 3. In equations (7) and (13) neither stiffness nor current flexibility depends on the intensity of loads P and q. Therefore, general solution of (13) is the C_q parameter, treated as an individual characteristic of the given structure. In the case of the elementary static scheme comprising simply supported beam with constant bending stiffness, one obtains the following reference value:

$$C_q = \frac{384}{5} = 76.8\ . \tag{14}$$

7. PARAMETRIC ANALYSIS OF BRIDGE FLEXIBILITY

A specific case of a 3-span bridge structure shown in Fig. 3 is analyzed below. Outer span length corresponding to λ = 2 was assumed in the calculations. The variable parameter in this analysis is the cross-section stiffness ratio n, as given in (3). Fig. 10 shows the results of the calculations in the form of the C_q parameter used in equations (12) and (13). The range of n includes cantilever bridges as well as bridges with constant cross-section height, e.g. launched incrementally, when n = 1. Intermediate cases may correspond to bridges of any type.

In the particular case of a 3-span beam with constant moment of inertia, n = 1, one obtains:

$$w = \frac{13}{3072}\cdot\frac{qL^4}{EI}\ . \tag{15}$$

In the case of spans with variable cross-section depth, the obtained value is considerably lower, e.g. when n = 8:

$$w = \frac{21}{3072\cdot 5}\cdot\frac{qL^4}{EI}\ . \tag{16}$$

An approximate relationship was determined for spans with variable height:

$$C_q \approx {\sim}250\sqrt{n}\ . \tag{17}$$

$$w = \frac{21}{3072 \cdot 5} \cdot \frac{qL^4}{EI} \ . \qquad (16)$$

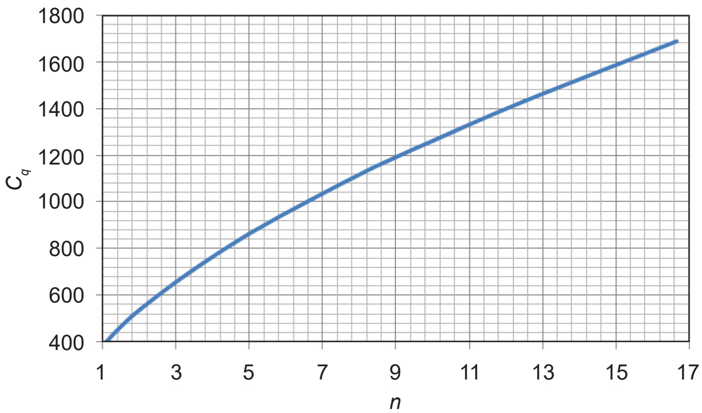

Fig. 10. Relationship between the C_q parameter and the cross-section stiffness ratio *n*
Rys. 10. Zależność parametru C_q od proporcji sztywności *n*

W przypadku przęseł o zmiennej wysokości wyznaczono przybliżoną zależność

$$C_q \approx \sim 250\sqrt{n} \ . \qquad (17)$$

a z wykresu przedstawionego na Rys. 9 wynika znaczna redukcja ugięcia w środku rozpiętości przęsła.

Rozpatrywany wcześniej przypadek geometrii mostu jest szczególny. Zwykle w przęsłach budowanych metodą betonowania wspornikowego rozpiętość przęsła skrajnego nie spełnia warunku λ = 2. Na Rys. 11 przedstawiono wyniki najczęściej spotykanych przypadków w mostach 3-przęsłowych, jak na Rys. 3. W legendzie wykresów podano trzy wartości *n*. Z wykresów tych wynika, że największy wpływ na wartości C_q, a więc i na podatność obiektów, ma schemat statyczny (geometria) ujęty w ilorazie rozpiętości λ, przy niewielkim udziale ilorazu sztywności *n*.

Na Rys. 12 przedstawiono wyniki obliczeń w przypadku, gdy *n* = 25/3 – równocześnie dla układów 3- i 5-przęsłowych. W obydwu grupach zmienną jest iloraz rozpiętości, ujęty w λ; w układzie 5-przęsłowym przy stałym ilorazie L_2/L_1 = 0,9. Gdy λ > 2, połowa przęsła skrajnego ma zmienną wysokość (jak na Rys. 3), natomiast pozostała część ma stałą wysokość. Gdy λ < 2, na przęśle o rozpiętości L_1 występuje paraboliczna zmiana wysokości, z wartością *EI* nad podporą.

As visible in the plot shown in Fig. 9, deflection in the middle of the span is reduced considerably.

The above-mentioned case of bridge geometry is not general. Typically, the outer span lengths in bridges concreted using cantilever technology do not correspond to λ = 2. Fig. 11 shows the results for the most popular cases of 3-span bridges (Fig. 3). Three values of n are given in the legend. As visible in the plot, the value of C_q (therefore – bridge flexibility) is primarily influenced by the static scheme (geometry) included in the span length ratio λ, with minor influence of the cross-section stiffness ratio *n*.

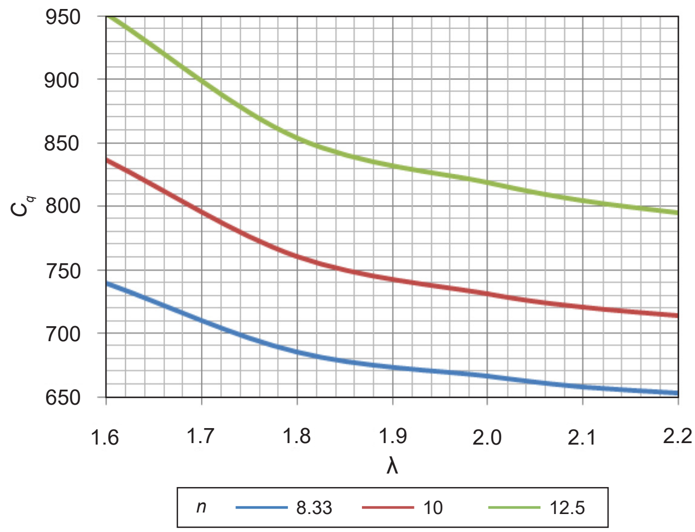

Fig. 11. Relationship between the C_q parameter, the cross-section stiffness ratio *n* and the span length ratio λ
Rys. 11. Zależność parametru C_q od ilorazu sztywności *n* i rozpiętości λ

Fig. 12 shows the results of calculations for *n* = 25/3 (for 3-span and 5-span systems). The variable in both groups was the span length ratio λ. For the 5-span system, the L_2/L_1 ratio was constant and equaled 0.9. When λ > 2, half of the outer span has variable height (like in Fig. 3), and the other half has constant height. When λ < 2, the change in cross-section height over the L_1 span is parabolic, with the value *EI* over the support.

Comparing the two plots labeled as „3" and „5" in Fig. 12, one may note that 5-span bridges display lower flexibility than 3-span bridges. Moreover, the plots indicate that deflections of the main span are reduced when loading grows due to the increase in the length of the span L_1 (and L_2). It is visible particularly well when λ < 1.6. This pertains to both cases, i.e. both 3-span and 5-span bridges.

Porównując wykresy oznaczone jako krzywe 3 i 5 na Rys. 12, można zauważyć, że mosty o większej liczbie przęseł wykazują mniejszą podatność niż mosty 3-przęsłowe. Z tych wykresów wynika również redukcja ugięć przęsła głównego, gdy przyrasta obciążenie przęsła w wyniku zwiększającej się rozpiętości L_1 (i L_2). Jest to szczególnie widoczne, gdy λ < 1,6. Wniosek ten dotyczy obydwu rozpatrywanych przypadków, a więc mostów zarówno 3-, jak i 5-przęsłowych.

Współczynnik C_q jest więc wartością charakterystyczną mostu, w której uwzględnia się schemat statyczny i zmiany geometrycznych parametrów przekroju poprzecznego wzdłuż długości przęseł. Przykładowo, w przypadku mostu przedstawionego na Rys. 1 i wyników podanych na Rys. 12, gdy λ = 140/75 = 1,867, jego podatność wynosi:

$$f = \frac{140^4}{732 \cdot 43,7 \cdot 10^4} = 1,201 \quad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{18}$$

W Tabl. 2 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń przykładów istniejących obiektów mostowych. Wykorzystano charakterystyki geometryczne schematów statycznych służących do określenia sztywności obiektów zastawione w Tabl. 1. Zastosowano indywidualne, własne obliczenia z uwagi na zróżnicowaną geometrię analizowanych mostów. W przypadku obiektów o większych rozpiętościach (L > 220 m) stosuje się w przęśle głównym beton lekki, a w rekordowych rozpiętościach – przęsło o konstrukcji stalowej [12]. Zatem są to układy hybrydowe, i jako takie zostały pominięte w tej pracy. Wyniki podane w Tabl. 2 wskazują na niewielki wzrost podatności w przęsłach wraz z przyrostem rozpiętości. W tablicy wyróżniają się obiekty mostowe o największych wartościach f > 1. Te mosty były przedmiotem analiz z uwagi na znaczne ugięcia powstałe podczas ich eksploatacji [3, 5, 6, 9, 11-13].

W zastosowaniach praktycznych występują również układy wieloprzęsłowe z wieloma wspornikami. W najprostszym układzie symetrycznym, wybudowanym jako układ z sześcioma wspornikami, linia ugięcia ma kształt przedstawiony na Rys. 4. Na Rys. 13 przedstawiono wykresy parametru C_q jako wyniki uzyskane z analizy układu „D" (bliźniaczego), jak na Rys. 4. Przyjęto w przęsłach skrajnych stały iloraz rozpiętości $\lambda = L/L_1$ = 1,6.

W przypadku estakad, czyli w układzie wieloprzęsłowym o regularnej, powtarzalnej budowie przęseł wspornikowych, występują jednakowe rozpiętości $L = L_1 = L_2 = L_i$.

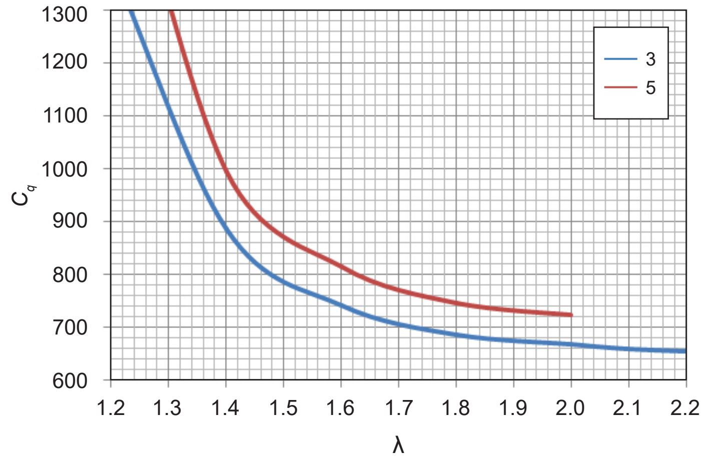

Fig. 12. Relationship between the C_q parameter and the span length ratio λ

Rys. 12. Zależność parametru C_q od ilorazu rozpiętości λ

Therefore, the C_q coefficient is a characteristic of the bridge, incorporating the static scheme and changes in cross-section geometric parameters along the length of the spans. For example, in the case of the bridge presented in Fig. 1 and values given in Fig. 12, when λ = 140/75 = 1.867, bridge flexibility equals:

$$f = \frac{140^4}{732 \cdot 43.7 \cdot 10^4} = 1.201 \quad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{MN}}\right]. \tag{18}$$

Results of calculations for chosen existing structures are given in Table 2. Geometric characteristic of static schemes presented in Table 1 were used. Due to the varied geometry of the analyzed bridges, individual calculations were performed. In the case of bridges with long spans (L > 220 m) lightweight concrete is used in the main span; for record span lengths – steel segments may be introduced [12]. Such bridges should be treated as hybrid structures, and as such they have been omitted in this work. Results shown in Table 2 indicate a slight increase in flexibility of the spans with an increase in their length. Bridges with the biggest values of f > 1 stand out in the table. These bridges have already been the subject of other analyses due to their considerable service deflections [3, 5, 6, 9, 11-13].

In practical applications, multi-span systems with multiple cantilevers are also used. In the simplest symmetrical system, which is constructed as six cantilevers, the deflection curve has the shape shown in Fig. 4. Plots of C_q parameters shown in Fig. 13 were obtained as the results of analysis of system „D" (twin), like in Fig. 4. Constant span length ratio was assumed for the outer spans: $\lambda = L/L_1$ = 1.6.

Ze względu na symetrię i regularne zmiany wysokości przęseł nad podporami, nie występują kąty obrotu przekrojów podporowych: $\varphi = \psi = 0$. Również kąt $\beta = 0$. Wobec tego można zastosować najprostszy model obliczeniowy [13], gdzie jedynym parametrem rozwiązania jest ugięcie w.

In the case of concrete trestles, i.e. multi-span systems with regular repeating cantilever spans, the lengths of the spans are identical $L = L_1 = L_2 = L_i$. Due to the symmetry and regular changes in cross-section height over supports, there is no rotation of support sections: $\varphi = \psi = 0$. Also, $\beta = 0$. Therefore, the simplest calculation model may be used [13], in which the only parameter of the solution is deflection w.

Table 2. Flexibility of selected bridges
Tablica 2. Podatności doraźne wybranych mostów

Structure name Nazwa obiektu	Span length ratio Iloraz rozpiętości przęseł			Ratio Iloraz $n = I_o/I$	Bridge flexibility Podatność obiektu f [m²/MN]	Parameter Parametr C
	L [m]	λ	L/L_2			
Milówka	82	1.78	2.23	5.94	0.267	0.382
Nysa	100	1.79	2.50	13.34	0.435	0.383
Łany	120	2.00	–	9.90	0.724	0.445
Kędzierzyn-Koźle (Fig. 1 / Rys. 1)	140	1.87	2.67	8.30	1.201	0.405
Poncin	155	1.40	–	13.45	0.388	0.295
Grudziądz	180	1.64	–	15.15	0.898	0.370
Støvset	220	2.20	–	4.47	1.654	0.468
Palau[*)]	241	2.51	–	51.6	4.047	0.264
Palau[**)]	241	2.51	–	51.6	2.180	0.179

*) originally designed system with a mid-span joint / układ projektowy z przegubem w środku rozpiętości
**) structure after the main span was made continuous / konstrukcja po uciągleniu przęsła głównego

Dla porównania, w modelu pojedynczego przęsła utwierdzonego gdy $n = 1$, czyli w belce o stałej wysokości, otrzymuje się:

$$w = \frac{8}{3072} \cdot \frac{qL^4}{EI} \ , \tag{19}$$

natomiast gdy $n = 14$, ugięcie redukuje się do wartości:

$$w = \frac{2}{3072} \cdot \frac{qL^4}{EI} \ . \tag{20}$$

Na Rys. 13 przedstawiono wykres parametru C_q oznaczony jako „F" – uzyskany, gdy rozpatrywane są estakady utworzone z jednakowych wsporników. Stąd model obliczeniowy jest sprowadzony do pojedynczego przęsła o schemacie belki obustronnie utwierdzonej, w którym wynik zależy wyłącznie od ilorazu sztywności ujętej w parametrze n, jak we wzorze (3). Omawiane rozwiązanie obejmuje obiekt z przęsłem głównym o bliźniaczym podparciu jak w Palau [15, 16]. W przypadku wykresu parametru C_q oznaczonego jako „D", wyniki uzyskane są jak dla bliźniaczego układu przęseł przedstawionego na Rys. 4. Różnica rzędnych wykresów C_q(F) – C_q(D)

For comparison, in the model of a single span with restrained support, when $n = 1$, i.e. beam of constant height, one obtains:

$$w = \frac{8}{3072} \cdot \frac{qL^4}{EI} \ , \tag{19}$$

in contrast, when $n = 14$, deflection is reduced to:

$$w = \frac{2}{3072} \cdot \frac{qL^4}{EI} \ . \tag{20}$$

Fig. 13 shows the plot of the C_q parameter labeled as "F" – obtained, when trestles composed of identical cantilevers are analyzed. In such case the calculation model is reduced to a single span – beam with restrained supports on both ends – in which the result depends only on the cross-section stiffness ratio n, like in equation (3). The analysis also encompasses structure with main span with twin support, like in Palau [15, 16]. Plot of the C_q parameter labeled as "D" shows the results obtained for the twin span system shown in Fig. 4. The difference in ordinate values of both plots C_q(F) – C_q(D) indicates generation of the β angle and influence of the inclination of span over wskazuje na powstanie kąta β oraz wpływ obrotu przęsła nad podporą ϕ na wartość ugięcia w. Kąt β = 0 występuje w przypadku estakad.

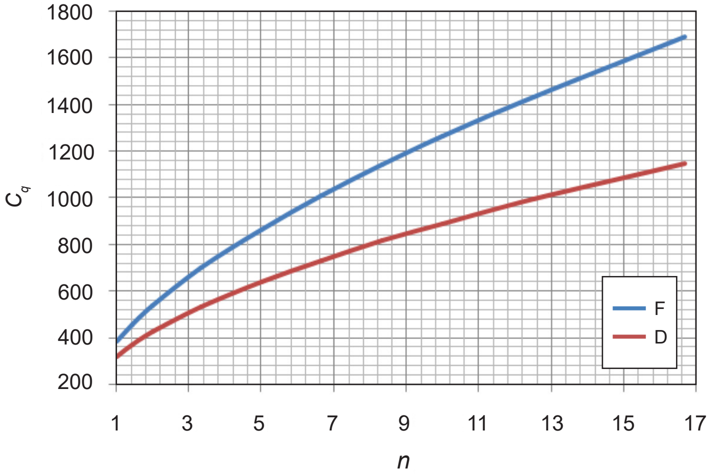

Fig. 13. Relationship between the C_q parameter and the cross-section stiffness ratio n
Rys. 13. Parametr C_q jako zależność od ilorazu sztywności n

8. SZTYWNOŚĆ I PODATNOŚĆ MOSTU JAKO WYNIK POMIARÓW

Sztywność mostu obliczana jest ze wzoru (5) jako iloraz siły P do ugięcia w, gdy obydwie wielkości występują w środku rozpiętości przęsła głównego, jak na Rys. 2. Odwrotnością tego stosunku jest maksymalna rzędna linii wpływu ugięcia η w tym punkcie, wyrażona jako

$$\eta = \frac{w}{P} \ . \tag{21}$$

Stąd można również określać sztywność mostu jako

$$k = \frac{P}{w} = \frac{1}{\eta} \ . \tag{22}$$

W badaniach mostów tworzy się również linie wpływu ugięcia η(x) [1, 2]. Wykorzystuje się do tego celu pomiar zmiany niwelety mostu, gdy obciążeniem jest siła P, jak na Rys. 2. Stąd linia ugięcia $w(x)$, powstała od obciążenia P ustawionego w środku rozpiętości przęsła głównego, przyjmuje kształt linii wpływu ugięcia wyrażonej jako funkcja

$$\eta(\mathrm{x}) = \frac{w(x)}{P} \ . \tag{23}$$

support ϕ on the value of deflection w. Angle β = 0 ocurse in the case of trestles.

8. BRIDGE STIFFNESS AND FLEXIBILITY OBTAINED FROM MEASUREMENTS

Bridge stiffness is calculated from equation (5) as the quotient of the force P divided by deflection w, when both quantities occur in the middle of the main span, like in Fig. 2. The inverse is the maximum value of the deflection influence line η, expressed as

$$\eta = \frac{w}{P} \ . \tag{21}$$

Therefore, bridge stiffness may be also determined as

$$k = \frac{P}{w} = \frac{1}{\eta} \ . \tag{22}$$

Deflection influence lines η(x) are also created during bridge tests [1, 2], based on measurements of changes in the vertical alignment of the bridge under loading P, like in Fig. 2. Therefore, deflection curve $w(x)$, generated under loading P located in the middle of the main span, assumes the shape of the deflection influence line, expressed by the function

$$\eta(\mathrm{x}) = \frac{w(x)}{P} \ . \tag{23}$$

On large bridges, $w(x)$ and η(x) are determined using a vehicle with the total weight P. It is assumed that all the individual axle loads P_i meet the condition:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \eta_i \approx P \cdot \eta \ . \tag{24}$$

In practice, validity of this assumption results from the shape of the deflection curve in the middle of the span, like in Fig. 2, and the fact that the distance between axles is small in relation to L – thus $\eta_i \approx \eta$ [1].

In the case of acceptance tests performed on the bridge presented in Fig. 1, in order to improve accuracy (readings from the measurement instruments) a parallel system of 3 identical vehicles was used. Mass of each loading vehicle equaled Q = 32 ton [1]. Measurements yielded the value of deflection w = 19 mm, which was used in equation (5) to obtain the stiffness of the bridge:

$$k = 3 \cdot \frac{32 \cdot 9.81}{19} = 49.6 \ \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right] . \tag{25}$$

W przypadku dużych mostów do wyznaczania $w(x)$ i $\eta(x)$ stosuje się jako obciążenie pojazd o całkowitym ciężarze P. Wówczas zakłada się, że udział wszystkich nacisków osi P_i spełnia warunek jak we wzorze:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \cdot \eta_i \approx P \cdot \eta \ . \tag{24}$$

W praktyce słuszność tego założenia wynika z kształtu linii ugięcia w otoczeniu środka rozpiętości, jak na Rys. 2, oraz z małego rozstawu osi w odniesieniu do L – stąd $\eta_i \approx \eta$ [1].

W przypadku badań odbiorczych mostu przedstawionego na Rys. 1 w celu zwiększenia dokładności (wartości odczytów z urządzeń pomiarowych) wykorzystano równoległy układ trzech jednakowych pojazdów. Jako obciążenia użyto samochodów o masie Q = 32 tony [1]. W wyniku pomiaru uzyskano ugięcie w = 19 mm, a stąd określono według wzoru (5) sztywność obiektu jako

$$k = 3 \cdot \frac{32 \cdot 9{,}81}{19} = 49{,}6 \quad \left[\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}\right] . \tag{25}$$

Wartość ta jest większa jedynie o 5% od wartości obliczonej w Tabl. 1. Należy przy tym zauważyć, że wynik uzyskany z zależności (25) dotyczy rzeczywistego obiektu z nawierzchnią i kapami chodnikowymi (jak na Rys. 1), a nie modelu konstrukcji (jak na Rys. 2).

Znacznie wygodniejsze do wyznaczania $\eta(x)$ jest korzystanie z jednego punktu pomiarowego ugięcia położonego w środku rozpiętości przęsła głównego, z pojazdem zmieniającym położenie $x(P)$. Jest to jeden z wyników badań odbiorczych służących do określenia charakterystyk dynamicznych [1-3]. Wówczas korzysta się z zasady wzajemności przemieszczeń Bettiego, z której wynika, że $w(x)$ ma kształt linii wpływu ugięcia, jak we wzorze (23). Zatem gdy korzysta się z wyników pomiarów, nie jest wymagana informacja dotycząca parametrów geometrycznych, jak w modelu obliczeniowym. Dzięki pomiarom w naturalny sposób odwzorowany jest rzeczywisty rozkład sztywności przęsła $EI(x)$. Przedstawiony algorytm wyznaczania $w(x)$ wykorzystano do utworzenia wykresów widocznych na Rys. 6, jako wyników pomiarów [2].

W ogólnym przypadku podatność mostu [6, 12] jest definiowana jako iloraz maksymalnego ugięcia w i intensywności obciążenia równomiernie rozłożonego q, jak we wzorze (11). W tym punkcie rozpatruje się wyniki pomiaru i linię ugięcia $w(x)$ uzyskaną z badania, jak na Rys. 2.

This value is bigger by only 5% than the value calculated in Table 1. One should bear in mind that the result obtained from (25) pertains to a real structure with roadway pavement and sidewalks (like in Fig. 1), and not to a structural model (like in Fig. 2).

It is much more comfortable to determine $\eta(x)$ using one deflection measurement point in the middle of the main span, with the vehicle changing its location $x(P)$. It is one of the results of acceptance tests pertaining to dynamic characteristics [1-3]. Based on the Betti's law of reciprocal deflection, $w(x)$ has the same shape as the deflection influence line, as shown in equation (23). Therefore, unlike in the calculation model, using measurement results does not require knowledge of the geometric parameters. Measurements naturally reflect the actual distribution of cross-section stiffness $EI(x)$ along the span. The presented algorithm of determination of $w(x)$ was used to create plots shown in Fig. 6 as measurement results [2].

In a general case, bridge flexibility [6, 12] is defined as the ratio of the maximum deflection w to the intensity of the uniformly distributed load q, like in equation (11). In this section, measurement results and deflection curve $w(x)$ obtained from testing are taken into account, like in Fig. 2. Using the deflection influence line $\eta(x)$ according to equation (23), in combination with uniformly distributed load q, one obtains the deflection in the middle of the main span:

$$w = q \int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x}) dx \ . \tag{26}$$

Upon dividing w by any load q, one obtains the current flexibility of the structure, expressed as:

$$f = \Omega = \int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x}) dx \ . \tag{27}$$

The value Ω is the area under the deflection influence line (determined for deflection in the middle of the span, like in Fig. 2) and, at the same time, the flexibility of the structure.

An advantage of such algorithm is the fact that it enables estimation of current flexibility of the structure at any chosen moment in its life. Its drawback lies in the need for highly sensitive measurement devices to determine the function $w(x)$. Measurements performed in various periods enable analysis of changes of flexibility within the service life of the structure. Another benefit of this

Korzystając z linii wpływu ugięcia η(x) zgodnie ze wzorem (23) oraz obciążenia równomiernie rozłożonego q, otrzymuje się ugięcie w środku rozpiętości przęsła głównego o wartości:

$$w = q\int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x})dx \ . \tag{26}$$

Z porównania w do dowolnego obciążenia q otrzymuje się doraźną podatność konstrukcji ujętą w równaniu:

$$f = \Omega = \int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x})dx \ . \tag{27}$$

Wartość Ω jest polem powierzchni pod wykresem linii wpływu ugięcia w środku rozpiętości przęsła głównego (jak na Rys. 2) i równocześnie podatnością konstrukcji.

Zaletą takiego algorytmu jest możliwość szacowania podatności obiektu w dowolnym momencie jego eksploatacji. Jego uciążliwością jest potrzeba stosowania urządzeń pomiarowych o dużej czułości do określenia funkcji w(x). Badania realizowane w różnych okresach pozwalają na analizę zmian podatności podczas użytkowania obiektu. Zaletą tego sposobu określania linii ugięcia jest uwzględnienie aktualnej (rzeczywistej) sztywności przęsła z udziałem wyposażenia (nawierzchni i elementów chodników). Istotne jest również ujęcie zmian fizycznych zachodzących w konstrukcji obiektu, np. modułu ściśliwości czy też zarysowania betonu podczas cyklicznych przejazdów pojazdów eksploatacyjnych.

9. ZWIĄZEK SZTYWNOŚCI Z PODATNOŚCIĄ DORAŹNĄ

Wzory (22) i (27) opisują sztywność k i podatność doraźną mostu f z wykorzystaniem linii wpływu ugięcia przęsła głównego η w środku jego rozpiętości L. Z iloczynu tych wielkości [3] wynika związek ujęty we wzorze:

$$k \cdot f = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x})dx \ . \tag{28}$$

Wzór (28) można przekształcić do postaci:

$$k \cdot f = \int_0^{L_k} \xi(x)dx = C \cdot L \ . \tag{29}$$

Powstała w ten sposób funkcja ξ(x) ma kształt linii ugięcia w(x), jak na Rys. 2, z wartością jednostkową w środku rozpiętości przęsła głównego. Funkcję ugięcia w(x) uzyskano od obciążenia siłą P, natomiast η(x) jest jej przemethod is determination of deflection curve corresponding to the current (real) stiffness of the span, incorporating the pavement and sidewalks. It is also necessary that physical changes (e.g. compressive modulus or concrete cracking) occurring in the structure during service under cyclic loads are taken into account.

9. RELATIONSHIP BETWEEN STIFFNESS AND CURRENT FLEXIBILITY

Equations (22) and (27) express stiffness k and current flexibility of the bridge f using the deflection influence line η (determined for deflection in the middle of the main span, whose length is L). Multiplication of these two quantities [3] yields the following relationship:

$$k \cdot f = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^{L_k} \eta(\mathrm{x})dx \ . \tag{28}$$

Equation (28) may be transformed to the following form:

$$k \cdot f = \int_0^{L_k} \xi(x)dx = C \cdot L \ . \tag{29}$$

The obtained function ξ(x) has the shape of the deflection curve w(x), like in Fig. 2, and assumes the value of 1 in the middle of the main span. Function of deflection w(x) was obtained using loading force P, whereas η(x) is its transformation, as shown in equation (23). Therefore, function ξ(x) is a specific case of w(x) when $w = 1$, like in Fig. 2. When a numerical model is used in FEM software, one only needs to force displacement equal to 1 in the middle of the main span, and the obtained deflection curve will be identical with function ξ(x). Therefore, the deflection influence line η(x) may be obtained by multiplying η · ξ(x); deflection curve w(x) may be obtained as w · ξ(x). Furthermore, if C is the area under the plot of function ξ(x), then Ω from equation (27) equals η · C.

Value C, that is the result of multiplication of k by f, depends solely on the static scheme of the structure, i.e. the ratio of span lengths and cross-section moments of inertia. In the case of a prismatic simply supported beam ($n = 1$), C assumes the value:

$$C = \frac{5}{8} \ . \tag{30}$$

In a 3-span system with span proportions of $2L_1 = L$, the value of C is similar to the previous one:

kształceniem, jak we wzorze (23). Zatem funkcja $\xi(x)$ jest szczególnym przypadkiem $w(x)$, gdy $w = 1$, jak na Rys. 2. Gdy korzysta się z modelu obliczeniowego w programie MES, wystarczy wymusić przemieszczenie jednostkowe w środku rozpiętości przęsła głównego, a wykres ugięcia utworzy funkcję $\xi(x)$. Zatem linię wpływu ugięcia $\eta(x)$ otrzymuje się z iloczynu $\eta \cdot \xi(x)$, a linię ugięcia $w(x)$ jako $w \cdot \xi(x)$. Wobec tego C jest polem powierzchni pod wykresem funkcji $\xi(x)$, natomiast wartość Ω ze wzoru (27) jest równa $\eta \cdot C$.

Wartość C, czyli wynik iloczynu k i f, zależy wyłącznie od schematu stycznego konstrukcji, a więc od rozpiętości przęseł i zmiany momentów bezwładności. W przypadku belki swobodnie podpartej o kształcie pryzmatycznym ($n = 1$) wartość C wynosi:

$$C = \frac{5}{8} \ . \tag{30}$$

Gdy układ jest trzyprzęsłowy, z przęsłem przyległym o proporcji $2L_1 = L$, wartość C zbliżona jest do poprzedniej:

$$C = \frac{26}{7 \cdot 8} \ . \tag{31}$$

W przypadku złożonych układów konstrukcyjnych, takich jak belki o zmiennej wysokości, można wykorzystać współczynniki określające sztywność i podatność C_P i C_q, jak we wzorach (7) i (13). Uzyskuje się wówczas C z równania:

$$k \cdot f = \frac{C_P}{C_q} L = C \cdot L \ . \tag{32}$$

Parametry C_P i C_q przedstawiono na Rys. 5, 6, 9, 10, 11 i 13 w zależności od proporcji sztywności n oraz rozpiętości przęseł λ. Gdy porównuje się jednakowe schematy statyczne, np. układ 3-przęsłowy jak na Rys. 3, i gdy $\lambda = 2$, otrzymuje się z wykresy przedstawione na Rys. 7 i 10. Stąd wynika zmiana wartości C, przedstawiona w postaci wykresu na Rys. 14.

Trzecia możliwość wyznaczenia parametru C polega na bezpośrednim korzystaniu z wartości k i f, jak we wzorze (32). W przypadku obiektu w Kędzierzynie-Koźlu (Rys. 1) otrzymuje się wynik z danych w Tabl. 1 i 2, jak we wzorze:

$$C = \frac{k \cdot f}{L} = \frac{47{,}2 \cdot 1{,}201}{140} = 0{,}405 \ . \tag{33a}$$

$$C = \frac{26}{7 \cdot 8} \ . \tag{31}$$

In the case of more complex structural systems, such as beams with variable cross-section height, one may use coefficients corresponding to stiffness and flexibility, C_P and C_q, given in equations (7) and (13), respectively. The value of C is then obtained from:

$$k \cdot f = \frac{C_P}{C_q} L = C \cdot L \ . \tag{32}$$

Parameters C_P and C_q and their relationships with stiffness ratio n and span length ratio λ are shown in Fig. 5, 6, 9, 10, 11 and 13. When identical static schemes are compared. e.g. a 3-span system (Fig. 3) with $\lambda = 2$, one obtains the plots shown in Fig. 7 and 10. The resultant changes in C are shown in the plot in Fig. 14.

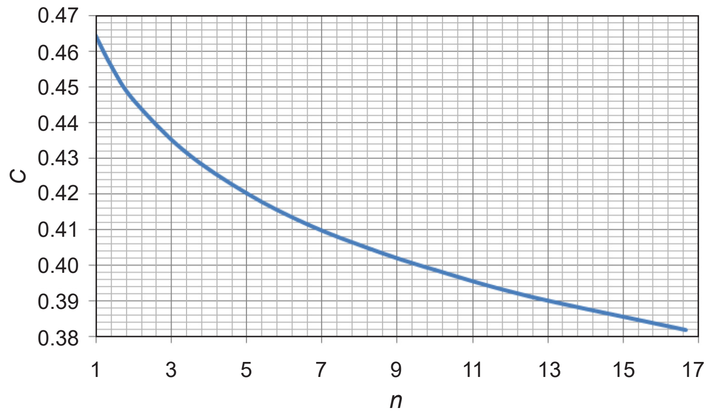

Fig. 14. Coefficient C as a function of n
Rys. 14. Współczynnik C jako funkcja parametru n

Third method of determination of C consists in direct use of k and f, like in equation (32). In the case of the bridge in Kędzierzyn-Koźle (Fig. 1), the result is obtained by using the data given in Tables 1 and 2:

$$C = \frac{k \cdot f}{L} = \frac{47.2 \cdot 1.201}{140} = 0.405 \ . \tag{33a}$$

When the C_P and C_q coefficients are used, also like in equation (32), one obtains:

$$C = \frac{C_P}{C_q} = \frac{297}{732} = 0.406 \ . \tag{33b}$$

In principle, the obtained value should be identical, since both k and f are calculated based on C_P and C_q.

Gdy korzysta się ze współczynników C_P i C_q, również jak we wzorze (32), otrzymuje się:

$$C = \frac{C_P}{C_q} = \frac{297}{732} = 0{,}406 \; . \tag{33b}$$

Z założenia wartość ta jest taka sama, bowiem zarówno k i f obliczane są na podstawie C_P i C_q.

Procedura określania sztywności obiektu na podstawie wyników pomiarów jest prosta [1]. Jest ona stosowana przy okazji badań odbiorczych jako podstawa do wyznaczenia współczynnika dynamicznego [2]. W przypadku podatności doraźnej korzysta się z linii wpływu ugięcia i zależności całkowej, jak we wzorze (27). Zatem skuteczniejsze jest szacowanie podatności doraźnej mostów, gdy znana jest ich sztywność k, z wykorzystaniem wzoru (32) o postaci

$$f = \frac{C \cdot L}{k} = \frac{C_P}{C_q} \cdot \frac{L}{k} \tag{34}$$

oraz wykresów wartości C_P i C_q podanych w pracy. W ostatniej kolumnie Tabl. 2 podano wartości C obliczone na podstawie f i k w wybranych mostach.

W przypadku mostów o stałej wysokości przęsła (n = 1), dla obiektów jednoprzęsłowych C = 0,625, a dla wieloprzęsłowych C = 0,464. Zatem korzystając z wyników podanych na Rys. 6, można stosować wartość pośrednią $C \approx 0{,}5$ a stąd wzór:

$$f \approx \frac{L}{2k} \; . \tag{35}$$

Biorąc pod uwagę małe różnice w wartościach k, w mostach o średniej rozpiętości (20 m < L < 60 m) zmiana podatności jest łagodniejsza niż zmiana sztywności z uwagi na mnożnik L występujący w (35). Stąd wynikają bardzo małe wartości f w przypadku mostów betonowych. W takich obiektach są one na poziomie od 1/40 m^2/MN do 1/6 m^2/MN.

W przypadku mostów wybudowanych z zastosowaniem technologii wspornikowej (nawisowej) proponuje się szacowanie podatności z wykorzystaniem zależności

$$f \approx \frac{C}{k} L \tag{36}$$

i korzystanie z wartości k oraz wykresu przedstawionego na Rys. 9. Wartości parametru C podane na Rys. 15 na przykładzie mostów 3-przęsłowych wyraźnie zależą od λ, a w mniejszym stopniu od n, jak widać dla trzech wybranych wartości opisanych w legendzie.

The procedure for determination of the stiffness of the bridge based on measurements is simple [1]. It is used in acceptance tests as the basis for determination of the dynamic coefficient [2]. In the case of current flexibility, the deflection influence line and the integral relationship is used, like in equation (27). Therefore, estimation of the current flexibility of bridges is more effective when their stiffness k is known and equation (32) in the form

$$f = \frac{C \cdot L}{k} = \frac{C_P}{C_q} \cdot \frac{L}{k} \tag{34}$$

is used in combination with the plots of C_P and C_q given herein. The last column of Table 2 presents the values of C calculated based on f and k for selected bridges.

In the case of bridges with constant span height (n = 1), for single-span structures C = 0.625, and for multi-span structures C = 0.464. Therefore, based on the results shown in Fig. 6, it is possible to use an intermediate value $C \approx 0.5$, yielding:

$$f \approx \frac{L}{2k} \; . \tag{35}$$

Considering the slight changes in k, for bridges of medium span lengths (20 m < L < 60 m) the change in flexibility is less pronounced than the change in stiffness due to the multiplier L in equation (35). Therefore, values of f are very low in the case of concrete bridges. In such structures they usually range from 1/40 m^2/MN to 1/6 m^2/MN.

In the case of bridges constructed using cantilever technology, it is proposed to evaluate flexibility using the relationship

$$f \approx \frac{C}{k} L \tag{36}$$

and to use the value of k and the plot shown in Fig. 9. Values of C shown in Fig. 15 on the example of 3-span bridges visibly depend on λ, and, to a lesser degree, on n, as shown by the three chosen values presented in the legend.

Fig. 16 shows a comparison of the values of C in 3-span and 5-span bridges. Calculations were based on a single value of n = 8.33, and plots were obtained based on Fig. 6 and 11. Importantly, differences in C between 3-span and 5-span bridges are small. However, values of C in general are highly variable, such as are the static schemes of bridges. This fact is visible in the last column of Table 2.

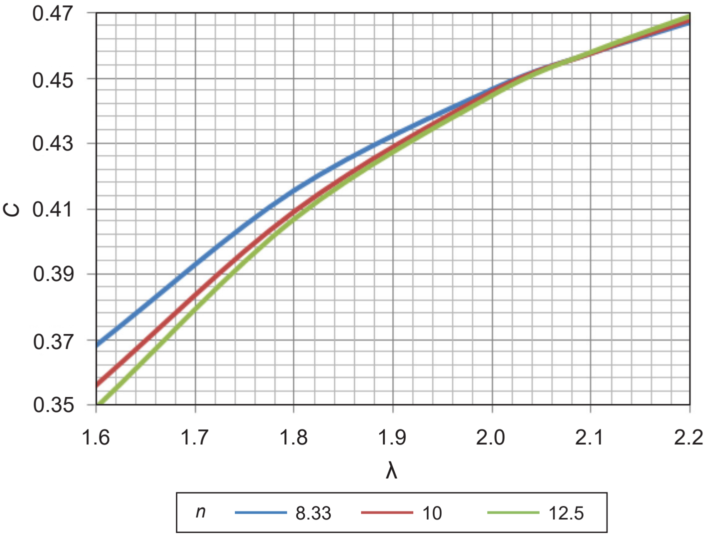

Fig. 15. Coefficient *C* depending on λ and *n* in a 3-span system
Rys. 15. Współczynnik *C* w zależności od λ i *n* w układzie 3-przęsłowym

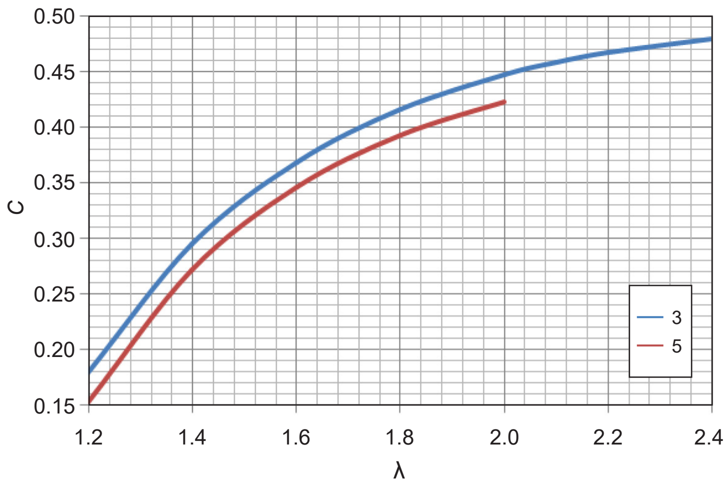

Fig. 16. Coefficient *C* depending on λ and the number of spans in the system
Rys. 16. Współczynnik *C* w zależności od λ i liczby przęseł w układzie

Na Rys. 16 porównano wartości *C* w mostach 3- i 5-przęsłowych. W obliczeniach przyjęto jedną wartość parametru $n = 8{,}33$, a wykresy uzyskano na podstawie Rys. 6 i 11. Istotne znaczenie ma w tym przypadku niewielka różnica wartości *C* pomiędzy obiektami 3- i 5-przęsłowymi. Wartości parametru *C* są jednak bardzo zróżnicowane, tak jak schematy statyczne mostów. Jest to widoczne w wartościach podanych w ostatniej kolumnie Tabl. 2.

10. ZMIANY PODATNOŚCI W FUNKCJI CZASU

Podczas eksploatacji betonowych obiektów mostowych prowadzi się obserwacje zmian niwelety jezdni, traktując je jako wizualny wskaźnik stanu technicznego konstrukcji przęsła [7, 9, 11]. Gdy w obiekcie występują nadmierne ugięcia przęsła, prowadzony jest monitoring z użyciem geodezyjnych technik pomiarowych [6, 9, 11]. Falowanie niwelety mostu w eksploatowanym obiekcie może wynikać z degradacji konstrukcji, w szczególności z ubytków korozyjnych zbrojenia czy też zarysowania betonu. W mostach z betonu sprężonego istotne znaczenie może mieć nadmierna redukcja siły sprężającej. W pracach [4-7, 9, 12, 13] uwagę skierowano przede wszystkim na procesy reologiczne zachodzące w betonie zakończeniu budowy.

Przedstawiony na Rys. 13 przykład analizy z wykresem oznaczonym jako „F" nawiązuje do mostu Koror-Babeldaob w Palau [7, 12, 15, 16] o rozpiętości $L = 241$ m

10. CHANGES OF FLEXIBILITY IN TIME

During the service of concrete bridge structures, variations in roadway vertical alignment are observed and treated as visual indicators of the technical condition of the span [7, 9, 11]. If excessive deflections of the span are noted, they are monitored using geodetic surveying techniques [6, 9, 11]. Variations in roadway vertical alignment during the service of the bridge may result from degradation of the structure, especially from corrosion of reinforcement or cracking of concrete. In prestressed concrete bridges, excessive reduction in prestressing force may have significant importance. Works [4-7, 9, 12, 13] were primarily focused on rheological processes occurring in concrete after the construction phase.

The example analysis with the plot labeled "F" (Fig. 13) is related to the Koror-Babeldaob Bridge in Palau [7, 12, 15, 16], with the span of $L = 241$ m and very short outer spans: $L_1/L \approx 0.4$. In this case, a twin support was provided on the intermediate pier, making the φ rotation (marked in Fig. 2, 3 and 4) impossible. The structure was characterized by a very high value of *n*. Consequently, bridge stiffness was low (Table 1) and flexibility was high (Table 2).

The structure in Palau displayed early and excessive deformation of the main span [7]. Deflection after 12 years of service was $w = 1.2$ m. After 18 years of service deflection reached $w = 1.39$ m and was many times greater than the i bardzo krótkich przęsłach skrajnych: $L_1/L \approx 0{,}4$. Wyjątkowo w tym moście zrealizowano bliźniacze podparcie na podporze pośredniej. Taki układ uniemożliwia powstanie kąta obrotu φ widocznego na Rys. 2, 3 i 4. Konstrukcja charakteryzowała się bardzo dużą wartością *n*. Stąd wynikała mała sztywność konstrukcji (Tabl. 1) oraz wysoka podatność (Tabl. 2).

Obiekt w Palau charakteryzował się od początku eksploatacji nadmierną deformacją przęsła głównego [7]. W tym moście po 12 latach eksploatacji wystąpiło ugięcie $w = 1{,}2$ m. Po 18 latach wzrosło ono do wartości $w = 1{,}39$ m i wielokrotnie przekroczyło wartość dopuszczalną. Wzmacnianie konstrukcji z zastosowaniem wtórnego sprężenia nie ograniczyło narastania ugięcia. Po uciągleniu przęsła obiekt w Palau uległ katastrofie budowlanej po krótkim okresie eksploatacji [15]. Jest to negatywny przykład propagacji ugięcia. Szczegółową analizę tego przypadku omówiono w [16].

W eksploatowanym obiekcie ani sztywność, ani podatność konstrukcji nie jest wartością stałą. W materiale konstrukcji zachodzą bowiem zmiany sztywności $EI(t)$, a w sprężeniu – procesy relaksacyjne [8, 17]. W przypadku niezmiennego q (ciężar własny konstrukcji z wyposażeniem – nawierzchnią i elementami chodników) i przy narastającym ugięciu $w(t)$ występuje przyrost podatności, jak we wzorze

$$\Delta f(t) = \frac{w(t)}{q} = \frac{L^4}{C_w(t) \cdot EI} \ . \tag{37}$$

W wyniku bezpośredniego (krótkotrwałego) obciążenia otrzymuje się wartość doraźną $f = f_o$. Zatem podatność w trakcie użytkowania obiektu podlega przyrostowi, a jej wartość w funkcji czasu opisuje wzór:

$$f(t) = f_o + \Delta f(t) = \left(\frac{1}{C_q} + \frac{1}{C_w(t)} \right) \frac{L^4}{EI} \ . \tag{38}$$

Zmiana podatności rozpoczyna się od wartości doraźnej $f = f_o$ w momencie powstania konstrukcji mostu.

Na podstawie analiz pomiarów wykonanych na licznych obiektach wybudowanych z zastosowaniem technologii wspornikowej [11] opracowano kilka wzorów ujmujących zmiany ugięcia $w(t)$ powstałego podczas eksploatacji obiektu. Jedną z propozycji jest prosta postać funkcji czasu obserwacji t (od momentu zakończenia budowy):

$$w(t) = \frac{c \cdot \sqrt{t}}{1000} L \ , \tag{39}$$

acceptable value. Strengthening of the span with additional prestressing did not stop the process. Shortly after the main span had been made continuous, the Palau bridge collapsed [15]. It is a negative example of deflection propagation. A detailed analysis was presented in [16].

Within the service life of a structure, neither its stiffness nor flexibility is constant. Material is subjected to ongoing changes in stiffness $EI(t)$, and prestressing is subjected to relaxation processes [8, 17]. In the case of constant q (self-weight of the structure with equipment – roadway and sidewalks) and increasing deflection $w(t)$, flexibility increases, as expressed in the equation:

$$\Delta f(t) = \frac{w(t)}{q} = \frac{L^4}{C_w(t) \cdot EI} \ . \tag{37}$$

In the case of direct (short-term) loading, one obtains the current (short-term) value of $f = f_o$. However, flexibility increases over the service life, and its value as a function of time is expressed by:

$$f(t) = f_o + \Delta f(t) = \left(\frac{1}{C_q} + \frac{1}{C_w(t)} \right) \frac{L^4}{EI} \ . \tag{38}$$

The variation of in flexibility starts from the short-term value $f = f_o$ at the moment when structure is constructed.

Based on the analysis of measurements performed on various cantilever bridges [11], several equations have been proposed to describe the change of deflection $w(t)$ during the service life. One of the propositions comprises a simple function of the observation time t (time that has passed since the construction phase was finished):

$$w(t) = \frac{c \cdot \sqrt{t}}{1000} L \ , \tag{39}$$

where $c = 0.24$ is a parameter based on the aforementioned analyses [11, 12]. Combining equations (37) and (39), one obtains the increase in flexibility as a function of time:

$$\Delta f(t) = \frac{0.03}{125} \sqrt{t} \frac{L}{q} \ . \tag{40}$$

Fig. 17 shows the variation in bridge flexibility on the example of the structure in Kędzierzyn-Koźle (shown in Fig. 1). Calculations incorporated the predicted increase in deflection according to equation (40), with the span self-weight of $q = 0.252$ MN/m. The change in flexibility commences when the structure is constructed, i.e. from the value of f_o. Beyond this point an increase in flexibility $\Delta f(t)$ occurs, as shown in Fig. 17.

gdzie c = 0,24 jest parametrem uzyskanym ze wspomnianych analiz [11, 12]. Z porównania wzorów (37) i (39) otrzymuje się przyrost podatności w funkcji czasu:

$$\Delta f(t) = \frac{0,03}{125}\sqrt{t}\,\frac{L}{q}\ . \tag{40}$$

Na Rys. 17 przedstawiono zmiany podatności na przykładzie mostu w Kędzierzynie-Koźlu, tak jak na Rys. 1. W obliczeniach uwzględniono prognozę przyrostu ugięcia według wzoru (40) oraz ciężar własny przęsła q = 0,252 MN/m. Zmiana podatności rozpoczyna się od momentu powstania konstrukcji mostu, tj. od wartości f_o. Od tego czasu występuje przyrost podatności $\Delta f(t)$, jak na Rys. 17.

Jeżeli obserwacje ugięcia prowadzi się w wybranym przedziale czasu $t_1 < t < t_2$ uzyskuje się wartość:

$$\Delta f_{12} = \frac{0,03}{125}\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right)\frac{L}{q}\ . \tag{41}$$

W analizowanym wcześniej przykładzie mostu, gdy t_1 = 5 lat, a t_2 = 30 lat, otrzymuje się

$$\Delta f_{12} = \frac{0,03}{125}\left(\sqrt{30} - \sqrt{5}\right)\frac{140}{0,253} = 0,43\quad\left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}}\right]. \tag{42}$$

Zatem w wyniku nie uwzględnia się znacznej zmiany podatności powstałej w przedziale czasu $t_0 < t < t_1$, czyli Δf_1 = 0,297 m²/MN.

W pracy korzysta się z założenia, że ciężar własny konstrukcji $q(x)$, wynikający z pola powierzchni przekroju poprzecznego, jest zwiększony jedynie w strefie podpory. Wpływa to w małym stopniu na maksymalne ugięcie w środku rozpiętości przęsła głównego [11]. Ciężar wyposażenia jest w tym przypadku jednakowy na całej długości mostu. Sumaryczny wynik tych obciążeń tworzy w pracy siłę równomiernie rozłożoną o intensywności q.

11. WNIOSKI

W pracy analizowano dwa parametry charakterystyki statycznej konstrukcji mostów wspornikowych: sztywność k i podatność f. Przeprowadzono również analizę związku pomiędzy nimi. Z przykładów obliczeń podanych w pracy wynikają następujące wnioski:

1. Definicję sztywności wykorzystano do określenia wpływu obciążenia doraźnego. Związana jest ona z charakterystyką dynamiczną mostów. Mosty o dużych rozpiętościach (L > 80 m) charakteryzują się małymi częstościami drgań własnych, poniżej 3 Hz [3].

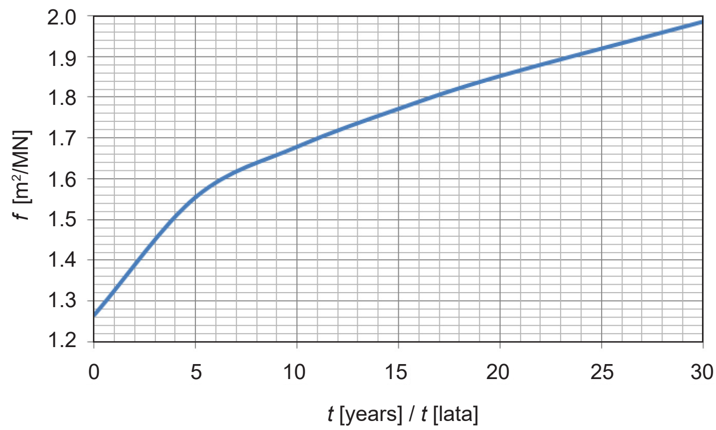

Fig. 17 . Variation of flexibility of the bridge in Kędzierzyn-Koźle
Rys. 17. Zmiany podatności w trakcie eksploatacji mostu w Kędzierzynie-Koźlu

If the deflections are measured in a selected period $t_1 < t < t_2$, one obtains:

$$\Delta f_{12} = \frac{0.03}{125}\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right)\frac{L}{q}\ . \tag{41}$$

For the analyzed example structure, when t_1 = 5 years and t_2 = 30 years, the value is

$$\Delta f_{12} = \frac{0.03}{125}\left(\sqrt{30} - \sqrt{5}\right)\frac{140}{0.253} = 0.43\quad\left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}}\right]. \tag{42}$$

Therefore, in this case the considerable change in flexibility in the period $t_0 < t < t_1$, i.e. Δf_1 = 0.297 m²/MN, was not included.

The presented analysis is based on the assumption that the self-weight of the structure $q(x)$, corresponding to its cross-section area, is bigger only in the vicinity of the support and does not considerably affect the maximum deflection in the middle of the main span [11]. Weight of the equipment is constant along the entire bridge. In this analysis, the sum of self-weights is distributed uniformly and has the constant intensity q.

11. CONCLUSIONS

Two static characteristics of cantilever bridges were analyzed in this work: stiffness k and flexibility f. Their relationship was also analyzed. Example calculations presented in the work enable formulation of the following conclusions:

2. Definicję podatności wykorzystano do określenia wpływu długotrwałego oddziaływania obciążenia na konstrukcję. Takie ujęcie podatności pozwala na analizę procesów reologicznych [6, 8, 9, 17, 18] oraz skutków degradacji konstrukcji. Gdy podatność doraźna mostów *f* przekracza 1, występują znaczne przyrosty ugięcia obserwowane jako duże zmiany niwelety podczas eksploatacji obiektów [4, 5, 7, 9, 11, 13, 19].

3. Z analiz numerycznych wynika, że sztywności mostów wspornikowych podlegają łagodnej redukcji wraz ze wzrostem rozpiętości przęsła głównego, przy wartościach $L < 130$ m. Powyżej tej rozpiętości następuje stabilizacja sztywności na poziomie $k = 60$ kN/mm. W przypadku podatności występuje odmienna sytuacja – obserwuje się rozproszone, ale stabilne wartości w całym rozpatrywanym zakresie *L*.

4. Ważnym elementem pracy jest analiza związku parametrów sztywności C_p i podatności C_q w modelu obliczeniowym mostów wybudowanych w technologii wspornikowej. Opracowano algorytm szacowania podatności na podstawie sztywności obiektu. Sztywność jest znacznie łatwiejsza do określenia na podstawie wyników badań mostów niż podatność.

5. Charakterystyka podatności w funkcji czasu eksploatacji mostu może być przydatna do analiz skutków obciążeń cyklicznych, destrukcji materiału oraz zjawisk reologicznych zachodzących w betonie. Do analizy funkcji podatności wykorzystuje się wyniki z monitoringu mostów [7, 9, 11]. Przyrost podatności jako zmiennej w czasie może być znaczący.

6. Rezultaty analiz podane w artykule mogą być wykorzystane do projektowanych mostów betonowych, również o średnich rozpiętościach, wykonanych z zastosowaniem innych technologii. W mostach wspornikowych o największych rozpiętościach stosuje się układy hybrydowe [12] (z różnych materiałów), stąd ich modele są inne niż rozpatrywane w niniejszej pracy.

1. Definition of stiffness was used for determination of the influence of short-term loads. It is related to dynamic characteristics of bridges. Long-span bridges ($L > 80$ m) are characterized by low natural frequencies, below 3 Hz [3].

2. Definition of flexibility was used for determination of the influence of long-term loads on the structure. Such approach to flexibility enables one to analyze rheological processes [6, 8, 9, 17, 18] and the effects of structural degradation. When the current flexibility *f* of a bridge exceeds 1, considerable increase in deflection occurs, which is observable as large changes in vertical alignment during service [4, 5, 7, 9, 11, 13, 19].

3. Numerical analyses indicate that stiffness of cantilever bridges decreases slightly with an increase in the length of the main span, for $L < 130$ m. Beyond this span length, stiffness stabilizes on the level of $k = 60$ kN/mm. In the case of flexibility, the situation is different – the observed values are scattered, but stable across the entire analyzed range of *L*.

4. An important part of the work consisted in the analysis of relationships between the stiffness parameter C_p and the flexibility parameter C_q in the model of cantilever bridges. An algorithm was developed to enable evaluation of the bridge's flexibility based on its stiffness. Stiffness is much easier to determine from test measurements than flexibility.

5. Flexibility as a function of service time may be useful for analyzing the effects of cyclic loads, material deterioration and rheological processes in concrete. The flexibility function is analyzed using the results of bridge monitoring surveys [7, 9, 11]. The increase of flexibility in time may be considerable.

6. The analyses presented herein may be applied to newly-designed concrete bridges, including medium-span bridges, using other construction technologies. Cantilever bridges with the greatest span lengths use hybrid systems [12] (various materials); therefore, their models differ from the models presented in this work.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

[1] *Machelski C.*: Ruchome obciążenia obiektów mostowych. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2015

[2] *Burdet O., Corthay S.*: Static and dynamic load testing of Swiss bridges. International Bridge Conference Warsaw '94., Warszawa, 1994

[3] *Machelski C.*: Sztywność i podatność mostów z betonu. Inżynieria i Budownictwo, 9-10, 2022

[4] *Bažant Z., Hubler M.H., Qlang Y.*: Excessive Creep Deflections: An Awakening. Concrete International, **33**, 8, 2011, 44-46

[5] *Machelski C.*: Concrete creep effects during bridge span construction using cantilever concreting technology. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **18**, 3, 2019, 193-210, DOI: 10.7409/rabdim.019.013

[6] *Machelski C.*: Main girder deformation function from service life of composite Bridges. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **21**, 3, 2022, 217-237, DOI: 10.7409/rabdim.022.013

[7] *Radomski W.*: Kilka uwag o efektach pełzania w konstrukcjach mostowych z betonu sprężonego. Obiekty inżynierskie, 2, 2012, 15-25

[8] *Rüsch H., Jungwirth D.*: Skurcz i pełzanie betonu w konstrukcjach betonowych. Arkady, Warszawa, 1979

[9] *Takacs P.F.*: Deflections in Concrete Cantilever Bridges: Observation and Theoretical Modeling. Doctoral Thesis, The Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2002

[10] *Ornat M., Piekarski J.*: 20 lat technologii betonowania nawisowego w Polsce. Wrocławskie Dni Mostowe, Wrocław, 2011

[11] *Pisarek B., Machelski C.*: Estimation of rheological effects in cantilever concrete bridges on the basis of a span's deflection line. Periodica Polytechica Civil Engineering, **66**, 1, 2022, 228-234, DOI: 10.3311/PPci.18151

[12] *Biliszczuk J., Hildebrand M., Machelski C., Sadowski K., Teichgraeber M.*: Belkowe mosty betonowe budowane metodami wspornikowymi. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2018

[13] *Machelski C.*: Linia ugięcia mostów betonowych jako efekt obciążeń stałych. Inżynieria i Budownictwo, **78**, 7-8, 2022, 305-309

[14] *Barras P., de Matteis D., Derais J.F., Duviard M., Guillot D., Lacombe J.M., Lacoste G., Lecointre D., Ojeda V., Paillusseau P., Reinhard J.M.*: Prestressed concrete bridges built using the cantilever method – Design guide. Setra, 2007

[15] *Radomski W.*: Katastrofy mostów. Historia i teraźniejszość. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2021

[16] *Tang Man-Chung*: The Story of the Koror Bridge. IABSE Bulletins, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, 2014

[17] *Brunarski L.*: Podstawy reologii konstrukcji z betonu. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa, 2019

[18] *Machelski C.*: Podatność mostów zespolonych podczas ich budowy i eksploatacji. Przegląd Budowlany, **94**, 7-8, 2023, 117-121, DOI: 10.5604/01.3001.0053.8502

[19] *Machelski C.*: Sztywność i zmiany podatności mostowych obiektów gruntowo-powłokowych. Inżynieria i Budownictwo, **79**, 3-4, 2023, 426-432