



MIECZYŚLAW SŁOWIK<sup>1)</sup>  
MIKOŁAJ BARTKOWIAK<sup>2)</sup>

## REVIEW OF ANALYTICAL-EMPIRICAL METHODS FOR DETERMINING STIFFNESS MODULI OF ASPHALT MIXTURES

### PRZEGLĄD ANALITYCZNO-EMPIRYCZNYCH METOD WYZNACZANIA MODUŁU SZTYWNOŚCI MIESZANEK MINERALNO-ASFALTOWYCH

**STRESZCZENIE.** W artykule przedstawiono i omówiono modele służące do określania modułu sztywności mieszanek mineralno-asfaltowych. Przedstawiono oryginalne wzory zaczerpnięte z artykułów źródłowych oraz alternatywne postacie wzorów po ich dostosowaniu do jednostek układu SI. Omówiono metody laboratoryjne oznaczania modułu sztywności wraz z podaniem, w jaki sposób oznacza się tę wielkość dla danego modelu. Przedstawiono także wszystkie dane wejściowe potrzebne do określenia modułu sztywności za pomocą wybranych modeli oraz podstawowe informacje dotyczące przygotowania próbek do oznaczania tej wielkości metodami laboratoryjnymi. Zwrócono uwagę, jakie błędy można popełnić przy korzystaniu z modeli analityczno-empirycznych. Dokonano również porównania wartości modułów sztywności obliczonych na podstawie modeli analityczno-empirycznych z opisanymi w literaturze wynikami badań eksperymentalnych.

**SŁOWA KLUCZOWE:** metoda belki zginanej (4PB-PR), metoda osiowego ściskania dynamicznego (DM), mieszanka mineralno-asfaltowa, model Hirscha, moduł sztywności, model Witczaka.

**ABSTRACT.** The paper outlines and elaborates models for determining stiffness moduli of asphalt mixtures. Some original patterns taken from source articles and alternative forms of formulas after their adaptation to the SI system of units were introduced. Various laboratory methods for determining the stiffness modulus including methods for fixing that quantity of a given model were discussed. All of input data needed for determining the stiffness modulus with the use of selected models and basic information concerning preparations of samples for determining that quantity through laboratory methods were presented. Attention was turned to errors which can be made while making use of analytical-empirical models. The values of stiffness moduli determined with the use of analytical-empirical models were also compared with their equivalents of experimental tests described in the literature.

**KEYWORDS:** asphalt mixture, dynamic modulus test (DM), four point bending test (4PB-PR), Hirsch's model, stiffness modulus, Witczak's model.

DOI: 10.7409/rabdim.018.001

<sup>1)</sup> Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Instytut Inżynierii Lądowej, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; mieczyslaw.slowik@put.poznan.pl

<sup>2)</sup> Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Instytut Inżynierii Lądowej; mikolaj.bartkowiak@put.poznan.pl (✉)

## 1. WPROWADZENIE

Moduł sztywności mieszanki mineralno-asfaltowej (mma) jest bardzo istotną wielkością charakteryzującą właściwości tego materiału. Różne wartości modułu sztywności pojawiają się na kolejnych etapach projektowania i realizacji nawierzchni asfaltowych. Moduł sztywności określa się w procesie projektowania nawierzchni nowych oraz wzmocnień metodami mechanistycznymi, w projektowaniu składu mieszanek mineralno-asfaltowych i kontroli produkcji mieszanki [1-2].

Moduł sztywności jest wielkością fizyczną, która kompleksowo charakteryzuje mieszanki mineralno-asfaltowe. Zależy od wielu czynników, wśród których można wymienić: skład mma, zawartość wolnych przestrzeni, kształt i sposób ułożenia ziaren kruszywa. Wartość modułu sztywności zmienia się istotnie wraz z temperaturą, częstotliwością obciążania [3-4], co jest jednym z powodów zróżnicowania pojęcia modułu sztywności i modułu sprężystości. W literaturze od wielu lat zwraca się uwagę [5], iż na wartość modułu sztywności oznaczanego w laboratorium mają wpływ także czynniki niezwiązane z właściwościami materiału. Wartość modułu sztywności jest zależna od metody jego oznaczania, parametrów aparatury badawczej, warunków wykonania pomiarów, a także kształtu i wymiarów próbki. Nie bez znaczenia jest też sposób wykonania lub pobrania próbki oraz jej wiek [5].

Celem niniejszej pracy jest ocena modeli analityczno-empirycznych służących do wyznaczania modułu sztywności oraz ich odpowiedników dostosowanych do jednostek układu SI. W literaturze często przy prezentacji modelu nie określa się dla jakiej metody oznaczania modułu sztywności model ten został opracowany, co może być przyczyną nieporozumień. Dlatego przedstawiono także metody laboratoryjnego oznaczania modułu sztywności mma, sposób przygotowania próbek wykorzystywanych w tych badaniach oraz określono, dla której metody laboratoryjnej prezentowane modele zostały opracowane.

## 2. MODELE ANALITYCZNO-EMPIRYCZNE

Już od ponad 60 lat badacze z licznych ośrodków naukowych starają się stworzyć coraz lepsze modele umożliwiające określanie wartości modułu sztywności mma. Modele te powstały na podstawie rezultatów uprzednio przeprowadzonych badań laboratoryjnych. Metody wyznaczania modułu sztywności mają nazwy pochodzące od nazwisk ich twórców. Najbardziej znane równania służące do obliczania modułu sztywności mma zostały zestawione w Tabl. 1.

## 1. INTRODUCTION

The stiffness modulus of asphalt mixture is a very important parameter characterizing properties of that material. Different values of stiffness moduli appear at particular stages of designing and realization of asphalt pavements. The stiffness modulus is used in the designing process of new pavements and strengthening of existing ones through mechanistic methods. It is also determined in the case of asphalt mixture composition designing as well as the factory production control process. [1-2].

The stiffness modulus is a physical property which extensively describes asphalt mixtures because it depends on many factors. The following ones can be named among them: the composition of an asphalt mixture, content of air voids, shape, lay-down, and composition of aggregate grains. The value of stiffness modulus changes substantially along with the temperature and frequency of loading [3-4] what makes the cause of differentiation between the stiffness modulus and modulus of elasticity. For a long time in the literature [5] attention has been drawn to the fact that also factors irrelevant with material properties have an impact on values of stiffness moduli determined in a laboratory. The value of stiffness modulus depends on the method of determining, parameters of testing equipment, conditions for taking measurements, and also on the shape and dimensions of the tested specimen. The procedure of making samples or sampling as well as their age [5] make questions of great significance.

The present paper is aimed at the assessment of analytical-empirical models for determining stiffness moduli and their equivalents adapted to units of the SI system. It may trigger off some misunderstanding when the applied method is often passed over during presentation of the corresponding model in the literature. That is why not only laboratory methods of determining stiffness moduli of asphalt mixtures were presented, but also ways of preparing samples applied in those tests, and models attributed to the suitable laboratory method were introduced.

## 2. ANALYTICAL-EMPIRICAL MODELS

Already for more than 60 years researchers of many scientific centres have been trying to create more and more excellent models making possible determining stiffness moduli of asphalt mixtures. These models have been designed on the grounds of previously carried out laboratory researches. Methods of determining stiffness moduli are named after names of their creators. The best-known predictive equations for determining stiffness moduli, so-called predictive equations are drawn up in Table 1.

Table 1. The best-known analytical-empirical models for determining stiffness moduli of asphalt mixtures (worked out on the grounds of [6])

Tablica 1. Najbardziej znane modele analityczno-empiryczne do obliczania modułu sztywności mma (opracowano na podstawie [6])

Name of a model Nazwa modelu	Year of publication Rok publikacji	Size of data base / Wielkość bazy danych	
		Number of mixtures Liczba mieszanek	Number of determinations Liczba oznaczeń
Van der Poel's model / Model Van der Poel'a	1954	No data / Brak danych	No data / Brak danych
Bonnaure's model / Model Bonnaure'a	1977	9	93
Witczak's, Andrei's, and Mirza's model (NCHRP 1-37A) Model Witczaka, Andrei i Mirzy (NCHRP 1-37A)	1999	205	2750
Hirsch's (Christensen's, Pellinen's, and Bonaquist's) model Model Hirscha (Christensen, Pellinen i Bonaquist)	2003	18	206
Witczak's, Bari's model (NCHRP 1-40D) Model Witczaka, Bari (NCHRP 1-40D)	2006	346	7400

Równanie Bonnaure opublikowane przez Bonnaure'a, Gestę, Gravoisa i Uge'a w [7] zostało przytoczone za [8-9]. Równanie to jest znane także jako Shell Oil predictive equation. Moduł sztywności mma  $S_m$  jest w tym równaniu zależny od modułu sztywności lepiszcza  $S_b$ . Moduł sztywności lepiszcza może być oznaczony w laboratorium albo odczytany z nomogramu Van Der Poel'a, który podano między innymi w [9]. Równanie ma dwie postacie, które stosuje się w zależności od wartości modułu sztywności lepiszcza:

- w przypadku, gdy moduł sztywności lepiszcza  $S_b \in (5 \cdot 10^6, 10^9)$

$$\lg S_m = \frac{B_4 + B_3}{2} \cdot (\lg S_b - 8) + \frac{B_4 - B_3}{2} \cdot |\lg S_b - 8| + B_2, \quad (1)$$

- w przypadku, gdy moduł sztywności lepiszcza  $S_b \in (10^9, 3 \cdot 10^9)$

$$\lg S_m = B_2 + B_4 + 2,0959 \cdot (B_1 - B_2 - B_4) \cdot (\lg S_b - 9), \quad (2)$$

gdzie:

$$B_1 = 10,82 - \frac{1,342 \cdot (100 - V_g)}{(V_g - V_b)}, \quad (3)$$

$$B_2 = 8,0 + 0,00568 \cdot V_g + 0,0002135 \cdot V_g^2, \quad (4)$$

$$B_3 = 0,6 - \lg \left( \frac{1,37 \cdot V_g^2 - 1}{1,33 \cdot V_g - 1} \right), \quad (5)$$

$$B_4 = 0,7882(B_1 - B_2), \quad (6)$$

oraz:

$S_m$  – moduł sztywności mma [Pa],

The Bonnaure's equation published by Bonnaure, Gest, Gravois and Uge in [7] has been quoted after [8-9]. It is also known as the Shell Oil predictive equation. In that equation the stiffness modulus of asphalt mixture  $S_m$  depends on the stiffness modulus of a bituminous binder  $S_b$ . It may be determined in a laboratory or read off from Van der Poel's nomogram given i.a. in [9]. The equation in question has two forms applied depending on the value of the stiffness modulus:

- in case when the binder stiffness modulus  $S_b \in (5 \cdot 10^6, 10^9)$

$$\log S_m = \frac{B_4 + B_3}{2} \cdot (\log S_b - 8) + \frac{B_4 - B_3}{2} \cdot |\log S_b - 8| + B_2, \quad (1)$$

- in case when the binder stiffness modulus  $S_b \in (10^9, 3 \cdot 10^9)$

$$\log S_m = B_2 + B_4 + 2,0959 \cdot (B_1 - B_2 - B_4) \cdot (\log S_b - 9), \quad (2)$$

where:

$$B_1 = 10,82 - \frac{1,342 \cdot (100 - V_g)}{(V_g - V_b)}, \quad (3)$$

$$B_2 = 8,0 + 0,00568 \cdot V_g + 0,0002135 \cdot V_g^2, \quad (4)$$

$$B_3 = 0,6 - \log \left( \frac{1,37 \cdot V_g^2 - 1}{1,33 \cdot V_g - 1} \right), \quad (5)$$

$$B_4 = 0,7882(B_1 - B_2), \quad (6)$$

and:

$S_m$  – stiffness modulus of asphalt mixture [Pa],

$S_b$  – moduł sztywności asfaltu [Pa],

$V_b$  – objętościowa zawartość asfaltu w mma (v/v) [%],

$V_g$  – objętościowa zawartość kruszywa w mma (v/v) [%].

W roku 1999 Witczak, Andrei i Mirza w raporcie z prac programu badawczego National Cooperative Highway Research Program [10] ogłosili kolejną wersję empirycznego równania do obliczania modułu sztywności. W ramach programu NCHRP 1-37A powstała ówczesna procedura projektowania nawierzchni MEPDG (ang. *Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide*), w której zastosowano model Witczaka. Równanie tego modelu ma postać [6]:

$$\lg|E^*|_{psi} = -1,25 + 0,029 \cdot P_{200} - 0,0018 \cdot P_{200}^2 - 0,0028 \cdot P_4 +$$

$$-0,058 \cdot V_a - 0,822 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + \quad (7)$$

$$+ \frac{3,872 - 0,0021 \cdot P_4 + 0,004 \cdot P_{38} - 0,000017 \cdot P_{38}^2 + 0,0055 \cdot P_{34}}{1 + \exp[-0,603313 - 0,313351 \cdot \lg f - 0,393532 \cdot \lg \eta]},$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [ $10^5$  psi],

$\eta$  – lepkość asfaltu [ $10^6$  Poise],

$f$  – częstotliwość siły obciążającej [Hz],

$V_a$  – zawartość wolnej przestrzeni w mma (v/v) [%],

$V_{beff}$  – efektywna zawartość asfaltu w mma (v/v) [%],

$P_{200}$  – zawartość frakcji przechodzącej przez sito nr 200 (#0,075 mm) w mm [%],

$P_4$  – suma odsiewu na sicie nr 4 (#4,76 mm) [%],

$P_{38}$  – suma odsiewu na sicie 3/8 cala (#9,5 mm) [%],

$P_{34}$  – suma odsiewu na sicie 3/4 cala (#19 mm) [%].

Ponieważ 1 psi = 0,006894757 MPa (1 MPa = 145,037738 psi) oraz 1 Pa·s = 10 Poise (1 cP = 1 mPa·s), można przekształcić elementy składowe wzoru (7) w następujący sposób:

$$\lg(|E^*_{psi}|/10^5) = \lg(|E^*_{MPa}|/0,006894757 \cdot 10^5) = \quad (8)$$

$$= \lg|E^*_{MPa}| - \lg 0,006894757 - \lg 10^5 = \lg|E^*_{MPa}| - 2,838519,$$

$$\lg \eta_{Poise} - \lg(\eta_{Pa \cdot s} \cdot 10) = \lg \eta_{Pa \cdot s} + \lg 10 = \lg \eta_{Pa \cdot s} + 1. \quad (9)$$

Wówczas wzór dostosowany do jednostek układu SI przyjmuje postać (10):

$$\lg|E^*|_{MPa} = 1,5885 + 0,029 \cdot P_0 - 0,0018 \cdot P_0^2 - 0,0028 \cdot P_4 +$$

$$-0,058 \cdot V_a - 0,822 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + \quad (10)$$

$$+ \frac{3,872 - 0,0021 \cdot P_4 + 0,004 \cdot P_9^2 + 0,0055 \cdot P_{19}}{1 + \exp[-0,996845 - 0,313351 \lg f - 0,393532 \lg \eta]},$$

$S_b$  – bitumen stiffness modulus [Pa],

$V_b$  – bitumen volume content in asphalt mixture (v/v) [%],

$V_g$  – aggregate volume content in asphalt mixture (v/v) [%].

Witczak, Andrei and Mirza announced in 1999 another version of the equation for calculating stiffness modulus in the report of research programme the National Cooperative Highway Research Program [10]. As a part of the plan NCHRP 1-37A the contemporary procedure for designing pavements Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide (MEPDG) with the application of Witczak's model has been created. The equation of this model has the following form [6]:

$$\log|E^*|_{psi} = -1.25 + 0.029 \cdot P_{200} - 0.0018 \cdot P_{200}^2 - 0.0028 \cdot P_4 +$$

$$-0.058 \cdot V_a - 0.822 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + \quad (7)$$

$$+ \frac{3.872 - 0.0021 \cdot P_4 + 0.004 \cdot P_{38} - 0.000017 \cdot P_{38}^2 + 0.0055 \cdot P_{34}}{1 + \exp[-0.603313 - 0.313351 \cdot \log f - 0.393532 \cdot \log \eta]},$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [ $10^5$  psi],

$\eta$  – bitumen viscosity [ $10^6$  Poise],

$f$  – loading force frequency [Hz],

$V_a$  – air void content in asphalt mixture (v/v) [%],

$V_{beff}$  – effective bitumen content in asphalt mixture (v/v) [%],

$P_{200}$  – content of fraction passing through the sieve No. 200 (#0.075 mm) in mm [%],

$P_4$  – mesh fraction on the sieve No. 4 (#4.76 mm) [%],

$P_{38}$  – mesh fraction on the sieve 3/8 inch. (#9.5 mm) [%],

$P_{34}$  – mesh fraction on the sieve 3/4 inch. (#19 mm) [%].

Since 1 psi = 0.006894757 MPa (1 MPa = 145.037738 psi), and 1 Pa·s = 10 Poise (1 cP = 1 mPa·s), the components of the formula (7) can be transformed in the following way:

$$\log(|E^*_{psi}|/10^5) = \log(|E^*_{MPa}|/0.006894757 \cdot 10^5) = \quad (8)$$

$$= \log|E^*_{MPa}| - \log 0.006894757 - \log 10^5 = \log|E^*_{MPa}| - 2.838519,$$

$$\log \eta_{Poise} - \log(\eta_{Pa \cdot s} \cdot 10) = \log \eta_{Pa \cdot s} + \log 10 = \log \eta_{Pa \cdot s} + 1. \quad (9)$$

Then the formula adopted the SI unit system takes the form (10):

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [MPa],

$\eta$  – lepkość asfaltu [MPa·s],

$f$  – częstotliwość siły obciążającej [Hz],

$V_a$  – zawartość wolnej przestrzeni w mma (v/v) [%],

$V_{beff}$  – efektywna zawartość asfaltu w mma (v/v) [%],

$P_0$  – zawartość frakcji przechodzącej przez sito #0,075 mm [%],

$P_4$  – suma odsiewu na sicie #4,76 mm [%],

$P_9$  – suma odsiewu na sicie #9,5 mm [%],

$P_{19}$  – suma odsiewu na sicie #19 mm [%].

W roku 2006 Witczak i Bari w publikacji [6] zaproponowali kolejną postać równania do obliczania modułu sztywności (NCHRP 1-40D):

$$\lg|E^*|_{psi} = -0,349 + 0,754 \cdot (|G_b^*|^{-0,0052}) \cdot [6,65 - 0,032 \cdot P_{200} + 0,0027 \cdot P_{200}^2 + 0,011 \cdot P_4 - 0,0001 \cdot P_4^2 + 0,006 \cdot P_{38} - 0,00014 \cdot P_{38}^2 - 0,08 \cdot V_a - 1,06 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a}] + (11)$$

$$+ \frac{2,56 + 0,03 \cdot V_a + 0,71 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + 0,012 \cdot P_{38} - 0,0001 \cdot P_{38}^2 - 0,01 \cdot P_{34}}{1 + \exp[-0,7814 - 0,5758 \lg|G_b^*| + 0,8834 \lg \delta_b]}$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [psi],

$|G_b^*|$  – dynamiczny moduł ścinania asfaltu [psi],

$\delta_b$  – kąt przesunięcia fazowego asfaltu [°].

Elementy składowe wzoru (11) można przekształcić w następujący sposób:

$$\lg|E^*|_{psi} = \lg(|E^*|_{MPa} / 0,006894757) = \lg|E^*|_{MPa} + (12)$$

$$- \lg 0,006894757 = \lg|E^*|_{MPa} + 2,161481,$$

$$0,754 \cdot (|G_b^*|_{psi}^{-0,0052}) = 0,754 \cdot (|G_b^*|_{Pa} / 6894,75729)^{-0,0052} = (13)$$

$$= 0,754 \cdot (|G_b^*|_{Pa}^{-0,0052}) / (6894,75729^{-0,0052}) =$$

$$= 0,754 \cdot (|G_b^*|_{Pa}^{-0,0052}) / 0,95508 = 0,78946 |G_b^*|_{Pa}^{-0,0052},$$

$$\lg|G_b^*|_{psi} = \lg\left(\frac{|G_b^*|_{Pa}}{6894,75729}\right) = \lg|G_b^*|_{Pa} - \lg 6894,75729 = (14)$$

$$= \lg|G_b^*|_{Pa} - 3,83852.$$

Wówczas wzór (11) dostosowany do jednostek układu SI przyjmuje postać:

$$\lg|E^*|_{MPa} = 1.5885 + 0.029 \cdot P_0 - 0.0018 \cdot P_0^2 - 0.0028 \cdot P_4 + (10)$$

$$- 0.058 \cdot V_a - 0.822 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} +$$

$$+ \frac{3.872 - 0.0021 \cdot P_4 + 0.004 \cdot P_9^2 + 0.0055 \cdot P_{19}}{1 + \exp(-0.996845 - 0.313351 \log f - 0.393532 \log \eta)},$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [MPa],

$\eta$  – bitumen viscosity [MPa·s],

$f$  – loading force frequency [Hz],

$V_a$  – air void content in asphalt mixture (v/v) [%],

$V_{beff}$  – effective bitumen content in asphalt mixture (v/v) [%],

$P_0$  – content of fraction passing through the sieve #0.075 mm [%],

$P_4$  – mesh fraction on the sieve #4.76 mm [%],

$P_9$  – mesh fraction on the sieve #9.5 mm [%],

$P_{19}$  – mesh fraction on the sieve #19 mm [%].

In 2006 Witczak and Bari proposed in the publication [6] another form of formula for determining stiffness moduli (NCHRP 1-40D):

$$\lg|E^*|_{psi} = -0.349 + 0.754 \cdot (|G_b^*|^{-0.0052}) \cdot [6.65 - 0.032 \cdot P_{200} + 0.0027 \cdot P_{200}^2 + 0.011 \cdot P_4 - 0.0001 \cdot P_4^2 + (11)$$

$$+ 0.006 \cdot P_{38} - 0.00014 \cdot P_{38}^2 - 0.08 \cdot V_a - 1.06 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a}] +$$

$$\frac{2.56 + 0.03 \cdot V_a + 0.71 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + 0.012 \cdot P_{38} - 0.0001 \cdot P_{38}^2 - 0.01 \cdot P_{34}}{1 + \exp[-0.7814 - 0.5758 \log|G_b^*| + 0.8834 \log \delta_b]},$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [psi],

$|G_b^*|$  – dynamic shear modulus of bitumen [psi],

$\delta_b$  – phase angle of bitumen [deg].

The formula components (11) can be transformed in the following way:

$$\lg|E^*|_{psi} = \lg(|E^*|_{MPa} / 0.006894757) = \lg|E^*|_{MPa} + (12)$$

$$- \lg 0.006894757 = \lg|E^*|_{MPa} + 2.161481,$$

$$0.754 \cdot (|G_b^*|_{psi}^{-0.0052}) = 0.754 \cdot (|G_b^*|_{Pa} / 6894.75729)^{-0.0052} = (13)$$

$$= 0.754 \cdot (|G_b^*|_{Pa}^{-0.0052}) / (6894.75729^{-0.0052}) =$$

$$= 0.754 \cdot (|G_b^*|_{Pa}^{-0.0052}) / 0.95508 = 0.78946 |G_b^*|_{Pa}^{-0.0052},$$



$$\begin{aligned} \lg|E^*|_{MPa} = & -2,5105 + 0,78946 \cdot (|G_b^*|^{-0,0052}) \cdot \\ & \cdot [6,65 - 0,032 \cdot P_0 + 0,0027 \cdot P_0^2 + 0,011 \cdot P_4 - 0,0001 \cdot P_4^2 + \\ & + 0,006 \cdot P_9 - 0,00014 \cdot P_4^2 - 0,08 \cdot V_a - 1,06 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a}] + \quad (15) \\ & \frac{2,56 + 0,03 \cdot V_a + 0,71 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + 0,012 \cdot P_9 - 0,0001 \cdot P_9^2 - 0,01 \cdot P_{19}}{1 + \exp[1,4288 - 0,5758 \lg|G_b^*| + 0,8834 \lg \delta_b]} \end{aligned}$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [MPa],

$|G_b^*|$  – dynamiczny moduł ścinania asfaltu [Pa],

$\delta_b$  – kąt przesunięcia fazowego asfaltu [°].

Alternatywny model, opracowany przez Hirscha [11] został rozwinięty przez Christensena i innych [12]. Wzory na obliczenie modułu sztywności i kąta przesunięcia fazowego mieszanki mineralno-asfaltowej mają postać:

$$|E^*|_{psi} = P_C \cdot \left[ 4200000 \cdot \left( 1 - \frac{VMA}{100} \right) + 3 \cdot |G_b^*| \cdot \left( \frac{VFA \cdot VMA}{10000} \right) \right] + \quad (16)$$

$$+ (1 - P_C) \cdot \left[ \frac{1 - VMA / 100}{4200000} + \frac{VMA}{3 \cdot VFA \cdot |G_b^*|} \right]^{-1},$$

$$\phi = -21 \cdot (\lg P_C)^2 - 55 \cdot (\lg P_C), \quad (17)$$

przy czym:

$$P_C = \frac{[20 + 3 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0,58}}{650 + [3 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0,58}}, \quad (18)$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [psi],

$\phi$  – kąt przesunięcia fazowego mma [°],

$|G_b^*|$  – dynamiczny moduł ścinania asfaltu [psi],

$VMA$  – zawartość wolnej przestrzeni w mieszance mineralnej (v/v) [%]

$VFA$  – zawartość wolnej przestrzeni wypełnionej asfaltem w mieszance mineralnej (v/v) [%].

Elementy składowe wzorów (16 - 18) można przekształcić w następujący sposób:

$$|E^*|_{psi} = 145 \cdot |E^*|_{MPa}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot |G_b^*|_{psi} &= 3 \cdot (|G_b^*|_{MPa} / 0,006894757) = \\ &= 435,1132 \cdot |G_b^*|_{MPa}. \quad (20) \end{aligned}$$

Wówczas wzory te dostosowane do jednostek układu SI przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \log|G_b^*|_{psi} &= \log \left( \frac{|G_b^*|_{Pa}}{6894.75729} \right) = \log|G_b^*|_{Pa} - \log 6894.75729 = \\ &= \log|G_b^*|_{Pa} - 3.83852. \quad (14) \end{aligned}$$

Then the formula (11) adopted to the SI unit system will take the form:

$$\begin{aligned} \log|E^*|_{MPa} = & -2.5105 + 0.78946 \cdot (|G_b^*|^{-0.0052}) \cdot \\ & \cdot [6.65 - 0.032 \cdot P_0 + 0.0027 \cdot P_0^2 + 0.011 \cdot P_4 - 0.0001 \cdot P_4^2 + \\ & + 0.006 \cdot P_9 - 0.00014 \cdot P_4^2 - 0.08 \cdot V_a - 1.06 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a}] + \quad (15) \\ & \frac{2.56 + 0.03 \cdot V_a + 0.71 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + 0.012 \cdot P_9 - 0.0001 \cdot P_9^2 - 0.01 \cdot P_{19}}{1 + \exp[1.4288 - 0.5758 \log|G_b^*| + 0.8834 \log \delta_b]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2.56 + 0.03 \cdot V_a + 0.71 \cdot \frac{V_{beff}}{V_{beff} + V_a} + 0.012 \cdot P_9 - 0.0001 \cdot P_9^2 - 0.01 \cdot P_{19}}{1 + \exp[1.4288 - 0.5758 \log|G_b^*| + 0.8834 \log \delta_b]}, \end{aligned}$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [MPa],

$|G_b^*|$  – dynamic shear modulus of bitumen [Pa],

$\delta_b$  – phase angle of bitumen [deg].

The alternative model worked out by Hirsch has been developed by Christensen and others [12]. Calculation formulas for the stiffness moduli and phase angles of asphalt mixtures have the form:

$$|E^*|_{psi} = P_C \cdot \left[ 4200000 \cdot \left( 1 - \frac{VMA}{100} \right) + 3 \cdot |G_b^*| \cdot \left( \frac{VFA \cdot VMA}{10000} \right) \right] + \quad (16)$$

$$+ (1 - P_C) \cdot \left[ \frac{1 - VMA / 100}{4200000} + \frac{VMA}{3 \cdot VFA \cdot |G_b^*|} \right]^{-1},$$

$$\phi = -21 \cdot (\log P_C)^2 - 55 \cdot (\log P_C), \quad (17)$$

wherein:

$$P_C = \frac{[20 + 3 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0,58}}{650 + [3 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0,58}}, \quad (18)$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [psi],

$\phi$  – phase angle of asphalt mixture [deg],

$|G_b^*|$  – dynamic shear modulus of bitumen [psi],

$VMA$  – air void content in an aggregate mixture (v/v) [%],

$VFA$  – content of air voids filled with bitumen in aggregate mixture (v/v) [%].

The elements of formulas (16 - 18) can be transformed in the following way:

$$|E^*|_{psi} = 145 \cdot |E^*|_{MPa}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot |G_b^*|_{psi} &= 3 \cdot (|G_b^*|_{MPa} / 0.006894757) = \\ &= 435.1132 \cdot |G_b^*|_{MPa}. \quad (20) \end{aligned}$$

$$|E^*|_{MPa} = \frac{P_c}{145} \cdot \left[ 4200000 \cdot \left( 1 - \frac{VMA}{200} \right) + 435 \cdot |G_b^*| \cdot \left( \frac{VFA \cdot VMA}{10000} \right) \right] + \frac{1 - P_c}{145} \cdot \left[ \frac{1 - (VMA / 100)}{4200000} + \frac{VMA}{435 \cdot VFA \cdot |G_b^*|} \right]^{-1}, \quad (21)$$

$$\phi = -21 \cdot (\lg P_c)^2 - 55 \cdot \lg P_c, \quad (22)$$

przy czym:

$$P_c = \frac{[20 + 435 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0.58}}{650 + [435 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0.58}}, \quad (23)$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [MPa],

$\phi$  – kąt przesunięcia fazowego mma [°],

$|G_b^*|$  – dynamiczny moduł ścinania asfaltu [MPa],

$VMA$  – zawartość wolnej przestrzeni w mieszance mineralnej (v/v) [%]

$VFA$  – zawartość wolnej przestrzeni wypełnionej asfaltem w mieszance mineralnej (v/v) [%].

Z omówionych różnych modeli służących do określania modułu sztywności mma autorzy artykułu za najbardziej aktualne uznali dwa modele: model Witczaka (NCHRP 1-40D) i model Hirscha. Pozostałe modele, które zostały opracowane wcześniej można uznać za mniej aktualne, głównie z powodu zastąpienia aparatury badawczej, na której oparto wcześniejsze modele oraz rozwoju elektroniki pomiarowej, który umożliwił uzyskanie bardziej precyzyjnych wyników pomiarów.

### 3. CHARAKTERYSTYKA METOD EMPIRYCZNYCH OZNACZANIA MODUŁU SZTYWNOŚCI MIESZANEK MINERALNO-ASFALTOWYCH

#### 3.1. PRZEDSTAWIENIE METOD

Już w 1954 roku Van der Poel [13] określił, iż wartość modułu sztywności zależy od:

- procedury (metody, sposobu) oznaczania,
- czasu obciążenia lub częstotliwości,
- temperatury.

W Europie moduł sztywności oznacza się obecnie głównie za pomocą metod opisanych w PN-EN 12697-26, „Mieszanki mineralno-asfaltowe - Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco - Część 26: Sztywność” [14]. W Stanach Zjednoczonych oraz innych krajach, w których do projektowania nawierzchni stosuje się MEPDG [15]

Then the formulas adopted to the SI unit system will take the form:

$$|E^*|_{MPa} = \frac{P_c}{145} \cdot \left[ 4200000 \cdot \left( 1 - \frac{VMA}{200} \right) + 435 \cdot |G_b^*| \cdot \left( \frac{VFA \cdot VMA}{10000} \right) \right] + \frac{1 - P_c}{145} \cdot \left[ \frac{1 - (VMA / 100)}{4200000} + \frac{VMA}{435 \cdot VFA \cdot |G_b^*|} \right]^{-1}, \quad (21)$$

$$\phi = -21 \cdot (\log P_c)^2 - 55 \cdot \log P_c, \quad (22)$$

wherein:

$$P_c = \frac{[20 + 435 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0.58}}{650 + [435 \cdot |G_b^*| \cdot (VFA / VMA)]^{0.58}}, \quad (23)$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [MPa],

$\phi$  – phase angle of asphalt mixture [deg],

$|G_b^*|$  – dynamic shear modulus of bitumen [MPa].

$VMA$  – air void content in an aggregate mixture (v/v) [%],

$VFA$  – content of air voids filled with bitumen in asphalt mixture (v/v) [%].

The authors of this paper have found two models, namely the Witczak's (NCHRP 1-40D), and the Hirsch's ones as the most actual for determining stiffness moduli of asphalt mixtures out of other discussed examples. The other models drawn up earlier may be regarded as less substantial mainly because of the replacement of test equipment making base of earlier models, and development of measurement electronics which has enabled getting more precise measurement results.

### 3. CHARACTERISTICS OF EMPIRICAL METHODS FOR DETERMINING STIFFNESS MODULI OF ASPHALT MIXTURES

#### 3.1. PRESENTATION OF METHODS

Already in 1954 Van der Poel [13] found that the value of stiffness modulus depends on:

- determining procedures (methods, techniques),
- time or frequency of loading,
- temperature.

In Europe stiffness modulus is determined now mainly with the use of methods described in the standard PN-EN 12697-26, “Bituminous mixtures - Methods of testing hot mix asphalt - Part 26: Stiffness” [14]. In the United States

moduł sztywności oznacza się według standardu American Association of State Highway and Transportation Officials: AASHTO T 342-11 „Oznaczenie modułu dynamicznego mieszanki mineralno-asfaltowej” [16].  $|E^*|$  jest to bezwzględna wartość modułu zespolonego  $E^*$ , która w niniejszym artykule jest nazywana dynamicznym modułem sztywności w oparciu o terminologię opisaną w normie [14].

W pracy autorzy rozważyli trzy wybrane metody oznaczania modułu sztywności mma:

- 1) metoda rozciągania pośredniego (IT-CY),
- 2) metoda belki zginanej (4PB-PR),
- 3) metoda osiowego ściskania dynamicznego (DM).

Badania metodami rozciągania pośredniego oraz belki zginanej wykonuje się zgodnie z PN-EN 12697-26 [14], natomiast metodę osiowego ściskania dynamicznego według AASHTO T 342 [16]. We wszystkich metodach badaniom poddaje się próbkę o odpowiednich wymiarach w trybie kontrolowanego naprężenia (inaczej pod powtarzalnym obciążeniem) lub w trybie kontrolowanego odkształcenia. Podczas badania rejestruje się siłę i przemieszczenie, co pozwala obliczyć wartości naprężenia, odkształcenia i kąta przesunięcia fazowego pomiędzy naprężeniem i odkształceniem.

### 3.2. METODA ROZCIĄGANIA POŚREDNIEGO IT-CY

Sposób obliczania modułu sztywności w metodzie pośredniego rozciągania oraz wstępną ocenę niepewności pomiaru przedstawiono w [17]. W tej metodzie badaniom poddaje się walcowe próbki o średnicy 100 mm lub 150 mm i wysokości od 30 mm do 75 mm [14]. Walcowe próbki do badań można wyciąć z istniejącej nawierzchni albo przygotować w laboratorium. W standardowej procedurze [14] wykonania oznaczenia próbki obciążane są według krzywej *haversine*. Przeszczenie poziome próbek walcowych o średnicy 100 mm powinno wynosić  $5 \pm 0,2 \mu\text{m}$  [17], a czas przyrostu siły  $124 \pm 4 \text{ ms}$ .

### 3.3. METODA BELKI ZGINANEJ 4PB-PR

Do oznaczania modułu sztywności metodą belki zginanej stosuje się prostopadłościenną próbkę, którą wycina się z płyt wykonanych z mieszanki mineralno-asfaltowej zagęszczonej urządzeniem wałującym zgodnie z [18]. Wymiary próbek powinny odpowiadać wymaganiom określonym w [14], gdzie między innymi określono, że szerokość  $B$  i wysokość  $H$  mają być trzy razy większe niż maksymalny wymiar ziarna  $D$  kruszywa użytego do wykonania mieszanki mineralno-asfaltowej. W badaniach wykorzystuje się próbki o wymiarach  $50 \text{ mm} \times 60 \text{ mm} \times 380 \text{ mm}$  ( $H \times B \times L$ ). Badanie jest

and other countries where the Mechanistic - Empirical Pavement Design Guide (MEPDG) [15] is applied for designing pavements, the stiffness modulus is defined acc. to the standard of American Association of State Highway and Transportation Officials: AASHTO T 342-11 Determining Dynamic Modulus of Hot Mix Asphalt (HMA) [16].  $|E^*|$  is an absolute value of a complex modulus  $E^*$  which in the present paper is called the dynamic stiffness modulus according to the terminology described in the standard [14].

The authors of the current paper have considered three selected methods for determining stiffness moduli of asphalt mixtures:

- 1) indirect tension test (IT-CY),
- 2) four point bending test (4PB-PR),
- 3) dynamic modulus test (DM).

Tests through the methods of indirect tension and bending beam are carried out in accordance with the standard PN-EN 12697-26 [14], whereas the method of dynamic modulus test on the basis of AASHTO T 342 [16]. In all methods samples with adequate shape and dimensions are subjects of the controlled stress (also known as the repeatable load) or as a matter of controlled strain. Forces and displacements are registered during testing what enables determining values of the stress, strain, and phase angle between these quantities.

### 3.2. THE METHOD OF INDIRECT TENSION IT-CY

The mode of determining stiffness modulus through the indirect tension test, and the initial assessment of measurement uncertainty have been presented in [17]. In that method cylindrical samples with a diameter of 100 mm or 150 mm and a height from 30 mm to 75 mm [14] are subjects of testing. They can be cut out from an existing pavement or prepared in a laboratory. Samples are loaded according to the haversine curve in the standard procedure [14] of determining. A horizontal displacement of cylinder samples with a diameter of 100 mm should come to  $5 \pm 0,2 \mu\text{m}$  [17], and a rise-time should amount to  $124 \pm 4 \text{ ms}$ .

### 3.3. THE FOUR POINT BENDING METHOD 4PB-PR

Prismatic samples cut out of plates made of an asphalt mixture compacted with a rolling machine in accordance with [18] are used for determining the stiffness modulus through the bending beam method. The dimensions of samples should



przeprowadzane w trybie kontrolowanego odkształcenia sinusoidalnie zmiennego. Doświadczenia wykazały, że aby zapobiec zniszczeniom zmęczeniowym odkształcenie powinno być utrzymywane na poziomie nieprzekraczającym  $50 \mu\text{m/m}$  i właśnie takie odkształcenie jest generowane w urządzeniu do badania metodą 4PB-PR. Pomiar ugięcia belki odbywa się w przekroju środkowym pomiędzy podporami (w połowie długości belki).

Dynamiczny moduł sztywności  $|E^*|$  oblicza się według wzoru:

$$|E^*| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad (24)$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [MPa],

$E_1$  – część rzeczywista zespolonego modułu sztywności [MPa],

$E_2$  – część urojona zespolonego modułu sztywności [MPa].

Część rzeczywistą i urojoną zespolonego modułu sztywności oblicza się z wzorów:

$$E_1 = \gamma \cdot \left( \frac{F}{z} \cdot \cos \Phi + 10^{-6} \cdot \mu \cdot \omega^2 \right), \quad (25)$$

$$E_2 = \gamma \cdot \frac{F}{z} \cdot \sin \Phi, \quad (26)$$

gdzie:

$F$  – siła pionowa [N],

$z$  – przemieszczenie [mm],

$\Phi$  – kąt przesunięcia fazowego [°],

$\omega$  – częstość kątowna [rad/s],

$\gamma$  – współczynnik kształtu (funkcja wymiaru i kształtu próbki) [1/mm],

$\mu$  – współczynnik masy (funkcja masy próbki oraz masy ruchomych części, które wpływają na siłę poprzez zjawisko bezwładności) [g].

Współczynniki kształtu i masy oblicza się według wzorów:

$$\gamma = \frac{L^2}{B \cdot H^2} \cdot \left( 0,75 - \frac{A^2}{L^2} \right), \quad (27)$$

$$\mu = R(x = L/2) \cdot \left( \frac{M}{\pi^4} + \frac{m}{R(x = A)} \right), \quad (28)$$

gdzie:

$B$  – szerokość próbki [mm],

$H$  – wysokość próbki [mm],

$l$  – odległość pomiędzy miejscami obciążenia próbki [mm],

correspond to requirements defined in [14] where it is determined among other things that their width  $B$  and height  $H$  have to be three times larger than the maximal size of aggregate grain  $D$  used for preparing the asphalt mixture. Samples with dimensions  $50 \text{ mm} \times 60 \text{ mm} \times 380 \text{ mm}$  ( $H \times B \times L$ ) may be applied in testing. It is carried out pursuant to conditions of controlled sinusoidally variable strains. The experiments have proved that strains should be kept up on a level not exceeding  $50 \mu\text{m/m}$  due to prevent fatigue failure. Just such a strain is maintained in the measuring device for testing by the method 4PB-PR. Measurements of beam deflections are performed in a central cross-section between supports (in the middle of beam length).

The dynamic stiffness modulus  $|E^*|$  is determined according to the formula:

$$|E^*| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad (24)$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [MPa],

$E_1$  – real part of a complex stiffness modulus [MPa],

$E_2$  – imaginary part of a complex stiffness modulus [MPa].

The real and imaginary parts of a complex modulus are determined according to the formula:

$$E_1 = \gamma \cdot \left( \frac{F}{z} \cdot \cos \Phi + 10^{-6} \cdot \mu \cdot \omega^2 \right), \quad (25)$$

$$E_2 = \gamma \cdot \frac{F}{z} \cdot \sin \Phi, \quad (26)$$

where:

$F$  – vertical force [N],

$z$  – displacement [mm],

$\Phi$  – phase angle [deg],

$\omega$  – angular frequency [rad/s],

$\gamma$  – shape coefficient (the function of dimensions and shape of a sample) [1/mm],

$\mu$  – mass coefficient (the function of masses of a sample and movable parts influencing on force via the inertia phenomenon) [g].

Shape and mass coefficients are determined acc. to formulas:

$$\gamma = \frac{L^2}{B \cdot H^2} \cdot \left( 0,75 - \frac{A^2}{L^2} \right), \quad (27)$$

$$\mu = R(x = L/2) \cdot \left( \frac{M}{\pi^4} + \frac{m}{R(x = A)} \right), \quad (28)$$

$L$  – odległość pomiędzy zewnętrznymi podporami [mm],

$M$  – masa próbki [g],

$m$  – masa ruchomych części urządzenia [g],

przy czym:

$$A = \frac{L-l}{2}, \quad (29)$$

$$R(x) = \frac{12L}{A} \left[ \frac{1}{\left( \frac{3x}{L} - \frac{3x^2}{L^2} - \frac{A^2}{L^2} \right)} \right]. \quad (30)$$

Na Rys. 1 przedstawiono schematycznie odległości  $L$  i  $l$ .

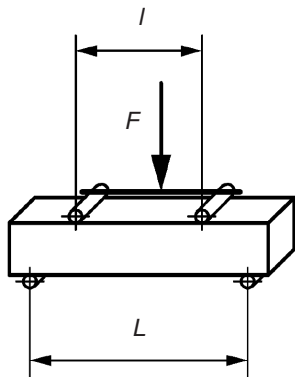


Fig. 1. The way of sample loading in the 4PB-PR test [14]  
Rys. 1. Sposób obciążenia próbki w badaniu 4PB-PR [14]

### 3.4. METODA OSIOWEGO ŚCISKANIA DYNAMICZNEGO

Modele Witczaka i Hirscha pozwalają szacować moduł sztywności określany według metody osiowego ściskania dynamicznego AASHTO T 342 [16]. Metoda ta nie jest powszechnie stosowana w Europie. Norma [16] określa, że należy ją stosować do badania próbek przygotowanych w laboratorium lub odwierconych z nawierzchni, których maksymalna średnica ziarna jest równa lub mniejsza niż 37,5 mm. Próbkę do badania powinna być wykonana zgodnie z zaleceniami normy [19] poprzez zagęszczenie mieszanki mineralno-asfaltowej w prasie żyrotorowej. Po wykonaniu mieszanki mineralno-asfaltowej w laboratorium należy ją kondycjonować przez 4 godziny w suszarce laboratoryjnej według normy [20], mieszanki pobrane „in situ” nie wymagają kondycjonowania. Walcowa próbka po zagęszczeniu powinna mieć średnicę 150 mm i wysokość około 170 mm. Następnie za pomocą wiertnicy z zagęszczonej próbki należy odwiercić część docelową o średnicy 101,6 mm (od 100 mm do 104 mm), po czym przyciąć próbkę do wysokości około 150 mm (od 147,5 mm do 152,5 mm) jak pokazano na Rys. 2.

where:

$B$  – sample width [mm],

$H$  – sample height [mm],

$l$  – distance between sample loading places [mm],

$L$  – distance between external supports [mm],

$M$  – sample mass [g],

$m$  – mass of movable parts of a machine [g],

wherein:

$$A = \frac{L-l}{2}, \quad (29)$$

$$R(x) = \frac{12L}{A} \left[ \frac{1}{\left( \frac{3x}{L} - \frac{3x^2}{L^2} - \frac{A^2}{L^2} \right)} \right]. \quad (30)$$

The distances  $L$  and  $l$  are presented schematically in Fig. 1.

### 3.4. THE DYNAMIC MODULUS TEST

The Witczak's and Hirsch's models enable estimating stiffness moduli determined according to the dynamic modulus test AASHTO T 342 [16]. This method is not universally used in Europe. The standard [16] defines that it should be applied for testing samples prepared in a laboratory or cut out from pavement bore-holes with a nominal maximal aggregate size that not exceeds 37.5 mm. The test specimen ought to be prepared in accordance with recommendations of the standard [19] through compacting asphalt mixture in a superpave gyratory compactor. After preparing asphalt mixture in a laboratory it should be conditioned for 4 hours in a laboratory oven according to the standard [20], however specimens sampled in situ do not require conditioning. A compacted cylindrical sample should have a diameter of 150 mm, and a height of around 170 mm. Then the target sample with a diameter of 101.6 mm (from 100 mm up to 104 mm) should be bored out of the compacted sample with the use of a core drilling machine, and cut to a height of around 150 mm (from 147.5 mm up to 152.5 mm) as shows Fig. 2. It is very important in the process of preparing sample to keep a close watch over the designed content of air voids.

The sample is axially loaded during testing through a sinusoidal variable compression force. The mode of loading the sample and installation details of displacement sensors LVDT can be seen in Fig. 3 and Fig. 4. The test is carried out as a matter of controlled strain. The axial strain should come to from 50  $\mu\text{m}/\text{m}$  up to 150  $\mu\text{m}/\text{m}$  acc. to [21]. The

W procesie przygotowywania próbki bardzo istotne jest, aby wykonana próbka charakteryzowała się zakładaną zawartością wolnych przestrzeni.



Fig. 2. The bored out sample [21]  
Rys. 2. Próbką po odwiercieniu [21]

Podczas badania próbkę obciąża się osiowo, poprzez przyłożenie siły ściskającej sinusoidalnie zmiennej. Sposób obciążenia próbki oraz szczegóły zamontowania czujników przemieszczeń LVDT pokazano na Rys. 3 i 4. Badanie przeprowadzane jest w trybie kontrolowanego odkształcenia. Według [21] osiowe odkształcenie powinno wynosić od  $50 \mu\text{m/m}$  do  $150 \mu\text{m/m}$ . System pomiarowy powinien być w pełni sterowany komputerowo włączając w to obliczanie naprężeń i odkształceń, gdyż otrzymane wartości mogą być zależne od ilości odczytów na cykl [21], dlatego rekomenduje się 50 punktów (odczytów) na cykl [16].

Moduł sztywności oblicza się na podstawie 5 ostatnich cykli (wykonuje się od 15 do 200 cykli w zależności od zastosowanej częstotliwości) [21] według wzoru:

$$|E^*| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad (31)$$

gdzie:

$|E^*|$  – dynamiczny moduł sztywności mma [MPa],

$\sigma_0$  – amplituda naprężenia [MPa],

$\varepsilon_0$  – amplituda odkształcenia [mm/mm],

przy czym:

$$\sigma_0 = \frac{P_m}{A}, \quad (32)$$

gdzie:

$P_m$  – amplituda siły pionowej [kN],

$A$  – powierzchnia przekroju próbki [ $\text{m}^2$ ], zazwyczaj  $A=0,008107 \text{ m}^2$ .

oraz:

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_m}{l}, \quad (33)$$

measurement system should be completely computer controlled including the stress and strain estimation because received values may depend on a number of read-outs for each cycle [21]. That is why 50 points (read-outs) per cycle [16] are recommended.

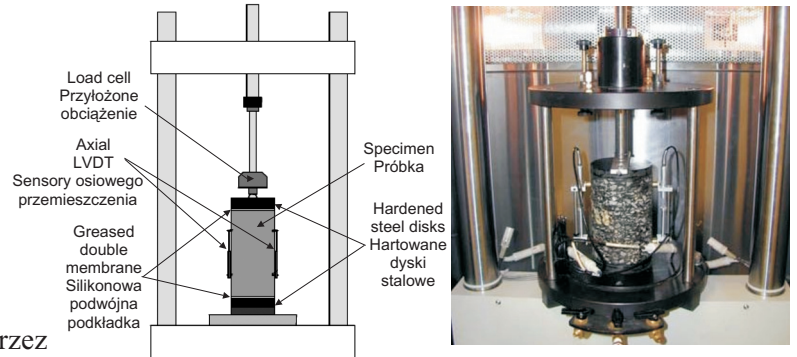


Fig. 3. The model of loading sample in the test DM [21]  
Rys. 3. Sposób obciążenia próbki w badaniu DM [21]

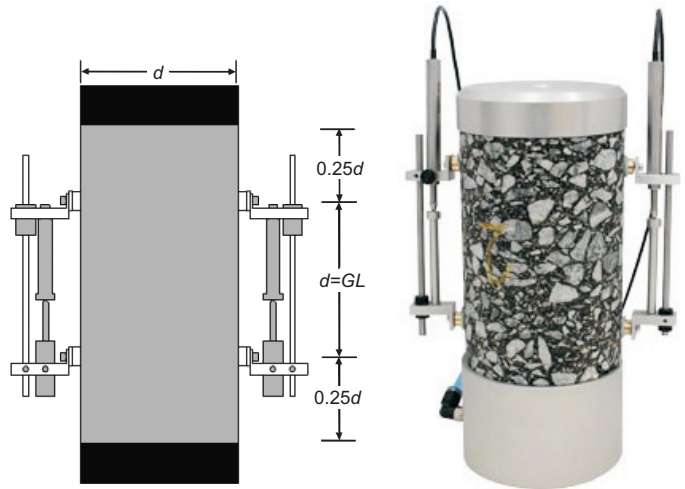


Fig. 4. The way of installing sensors LVDT in a test DM [21]  
Rys. 4. Sposób montażu czujników LVDT w badaniu DM [21]

The stiffness modulus is determined on the grounds of 5 latest cycles (from 15 up to 200 cycles carried out depending on an applied frequency [21]) acc. to the formula:

$$|E^*| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad (31)$$

where:

$|E^*|$  – dynamic stiffness modulus of asphalt mixture [MPa],

$\sigma_0$  – stress amplitude [MPa],

gdzie:

- $\delta_m$  – amplituda przemieszczenia [mm],
- $l$  – baza czujnika przemieszczenia [mm],  $l=d$ , zazwyczaj  $d=101,6$  mm.

Metoda osiowego ściskania dynamicznego jest najpowszechniej używaną metodą do oznaczania modułu sztywności w Stanach Zjednoczonych i krajach korzystających z norm AASHTO (np. Kanada). Jak już podano, za pomocą tej metody oznacza się moduł sztywności w procedurze projektowania nawierzchni według MEPDG, co powoduje, że w sprzęt do wykonywania tego oznaczenia powinno być wyposażone każde większe laboratorium badawcze w tych krajach. Tak duże zapotrzebowanie na urządzenia laboratoryjne spowodowało, że oznaczanie modułu sztywności metodą osiowego ściskania dynamicznego można wykonać za pomocą wielu różnych urządzeń lub z wykorzystaniem odpowiednich przystawek. Jednym z tych urządzeń jest Simple Performance Tester (SPT) [8]. Opracowano także procedurę, która do oznaczania modułu sztywności metodą osiowego ściskania dynamicznego wykorzystuje sprzęt używany do oznaczania modułu sztywności metodą rozciągania pośredniego [22-25]. Pomimo iż norma amerykańska [16] zamiennie dopuszcza obciążanie siłą pionową o przebiegu haversine, to we wszystkich znanych autorom opracowaniach zastosowano obciążenie sinusoidalnie zmienne.

#### 4. DANE WEJŚCIOWE WYKORZYSTYWANE W MODELACH WITCZAKA ORAZ HIRSCHA

Modele Witczaka i Hirscha różnią się pod względem wprowadzanych danych wejściowych. Do wielkości fizycznych oznaczanych w badaniach laboratoryjnych można zaliczyć:

- a) oznaczanych dla asfaltu:
  - $|G_b^*|$  – moduł ścinania asfaltu [MPa],
  - $\delta_b$  – kąt przesunięcia fazowego asfaltu [ $^\circ$ ],
  - $G_b$  – gęstość asfaltu [ $\text{Mg}/\text{m}^3$ ], (oznaczenie europejskie  $\rho_B$ ),
- b) oznaczanych dla mieszanki mineralnej:
  - $G_{sb}$  – gęstość mieszanki mineralnej [ $\text{Mg}/\text{m}^3$ ], (oznaczenie europejskie  $\rho_{agg}$ ),
  - $P_{200}, P_4, P_{38}, P_{34}$  – zawartość na sicie o danej wielkości oczka [%],
- c) oznaczanych dla mieszanki mineralno-asfaltowej:
  - $P_b$  – efektywna zawartość asfaltu w masie mma wyrażona w [%], (oznaczenie europejskie  $B$ ),

$\varepsilon_0$  – strain amplitude [mm/mm].

wherein:

$$\sigma_0 = \frac{P_m}{A}, \quad (32)$$

where:

- $P_m$  – amplitude of a vertical force [kN],
- $A$  – intersection surface of a sample [ $\text{m}^2$ ], usually  $A=0.008107 \text{ m}^2$ .

and:

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_m}{l}, \quad (33)$$

where:

- $\delta_m$  – displacement amplitude [mm],
- $l$  – base of displacement detector [mm],  $l=d$ , usually  $d=101.6$  mm.

The method of dynamic modulus test is the most commonly used way of determining the stiffness modulus in the United States and countries making use of AASHTO standards (e.g. Canada). As it was already announced the stiffness modulus in the procedure for designing pavements acc. to MEPDG is determined with the use of that method causing the need to fit each up-to-date testing laboratory in these countries with a necessary equipment for conducting that test. Such a high demand and for the laboratory equipment has caused that determining stiffness moduli can be performed through many different devices or by means of using suitable attachments. One of them is the simple performance tester (SPT) [8]. Moreover, the procedure making good use of the equipment for determining stiffness moduli via dynamic modulus test through the method of indirect tension has been drawn up [22-25]. Despite the fact that the American standard [16] convertibly allows the vertical force loading, yet the sinusoidally changeable loading has been applied in all studies known by the authors of this paper.

#### 4. INPUT DATA APPLIED IN THE WITCZAK'S AND HIRSCH'S MODELS

The Witczak's and Hirsch's models differ on the grounds of introducing input data. The following physical properties can be determined through laboratory testing:

- a) determined for bitumen:
  - $|G_b^*|$  – dynamic shear modulus of bitumen [MPa],
  - $\delta_b$  – phase angle of bitumen [deg],
  - $G_b$  – bitumen density [ $\text{Mg}/\text{m}^3$ ], (European marking  $\rho_B$ ),



- $G_{mm}$  – gęstość mieszanki mineralno-asfaltowej [ $\text{Mg/m}^3$ ], (oznaczenie europejskie  $\rho_m$ ),
- $G_{mb}$  – gęstość objętościowa mieszanki mineralno-asfaltowej [ $\text{Mg/m}^3$ ], (oznaczenie europejskie  $\rho_b$ ).

Na podstawie tych wielkości oblicza się zawartość wolnych przestrzeni w mma (34) [26], zawartość wolnej przestrzeni w mieszance mineralnej (35, 36), zawartość wolnej przestrzeni wypełnionej asfaltem w mieszance mineralnej (37) oraz efektywną zawartość objętościowa asfaltu w mma (38):

$$V_a = \left(1 - \frac{G_{mb}}{G_{mm}}\right) \cdot 100, \quad (34)$$

gdzie:

$V_a$  – zawartość wolnej przestrzeni w mma [%],

$$VMA = \left[1 - \frac{G_{mb} \cdot (1 - P_b)}{G_{mm}}\right] \cdot 100, \quad (35)$$

$$VMA = V_a + P_b \cdot \frac{G_{mb}}{G_b}, \quad (36)$$

gdzie:

$VMA$  – zawartość wolnej przestrzeni w mieszance mineralnej (v/v) [%],

$$VFA = \left(1 - \frac{V_a}{VMA}\right) \cdot 100, \quad (37)$$

gdzie:

$VFA$  – zawartość wolnej przestrzeni wypełnionej asfaltem w mieszance mineralnej (v/v) [%],

$$V_{beff} = P_b \cdot \frac{G_{mb}}{G_b} \quad (38)$$

gdzie:

$V_{beff}$  – efektywna zawartość objętościowa asfaltu w mma (v/v) [%].

Zestawienia danych wejściowych dokonano w Tabl. 2.

Table 2. Input data introduced to selected analytical-empirical models

Tablica 2. Dane wejściowe wprowadzane do wybranych modeli analityczno-empirycznych

Input data Dane wejściowe	Model	
	Witczak (NCHRP 1-40D)	Hirsch
$ G_b^* $	X	X
$\delta_b$	X	
$VMA$		X
$VFA$		X
$P_{200}, P_4, P_{38}, P_{34}$	X	
$V_a$	X	
$V_{beff}$	X	

b) determined for an aggregate mix:

- $G_{sb}$  – density of an aggregate mix [ $\text{Mg/m}^3$ ], (European marking  $\rho_{agg}$ ),
- $P_{200}, P_4, P_{38}, P_{34}$  – contents on a sieve with a given hole size [%],

c) determined for an asphalt mixture:

- $P_b$  – effective content of bitumen in a mass of asphalt mixture expressed in [%], (European marking  $B$ ),
- $G_{mm}$  – density of an asphalt mixture [ $\text{Mg/m}^3$ ], (European marking  $\rho_m$ ),
- $G_{mb}$  – volume density of an asphalt mixture [ $\text{Mg/m}^3$ ], (European marking  $\rho_b$ ).

The contents of: air voids in an asphalt mixture (34) [26], air voids in an aggregate mix (35, 36) [26], air voids filled with bitumen in aggregate mix (37), and the effective volume content of bitumen in asphalt mixture (38) are determined on the ground of these values:

$$V_a = \left(1 - \frac{G_{mb}}{G_{mm}}\right) \cdot 100, \quad (34)$$

where:

$V_a$  – the content of air voids in asphalt mixture [%],

$$VMA = \left[1 - \frac{G_{mb} \cdot (1 - P_b)}{G_{mm}}\right] \cdot 100, \quad (35)$$

$$VMA = V_a + P_b \cdot \frac{G_{mb}}{G_b}, \quad (36)$$

where:

$VMA$  – the content of air voids in an aggregate mix (v/v) [%],

$$VFA = \left(1 - \frac{V_a}{VMA}\right) \cdot 100, \quad (37)$$

where:

$VFA$  – the content of air voids filled with bitumen in an aggregate mix (v/v) [%],

$$V_{beff} = P_b \cdot \frac{G_{mb}}{G_b} \quad (38)$$

where:

$V_{beff}$  – the effective volume content of bitumen in asphalt mixture (v/v) [%].

The list of input data is presented in Table 2.

The dynamic shear modulus of bitumen  $|G_b^*|$  appears in both models as the most significant quantity what proved Bari and Witczak [6] through taken by them sensitivity analyses. The phase angle  $\delta_b$  is another parameter characterizing bitumen properties of the Witczak's model.



W obu modelach jako analizowana wielkość wejściowa występuje dynamiczny moduł ścinania asfaltu  $|G_b^*|$ , który jest najbardziej istotną wielkością w tych modelach, co wykazali Bari i Witczak [6] poprzez wykonanie analizy wrażliwości. W modelu Witczaka dodatkowym parametrem charakteryzującym właściwości asfaltu jest kąt przesunięcia fazowego  $\delta_b$ . W modelu Witczaka jako dane wejściowe wykorzystuje się wielkości oznaczane standardowo w laboratorium podczas badań mieszanek mineralno-asfaltowych. W modelu tym kruszywo charakteryzuje się poprzez dane o uziarnieniu mieszanki mineralnej. Natomiast w modelu Hirscha kruszywo charakteryzuje się poprzez gęstość mieszanki mineralnej  $G_{sb}$ , która nie zawsze bywa bezpośrednio oznaczana podczas badań, można ją jednak obliczyć na podstawie oznaczeń gęstości wykorzystanych kruszyw (najczęściej podanych przez producenta kruszywa) i ich procentowej zawartości w mieszance według [27]. W publikacji [6] autorzy ostatniego modelu Witczaka stwierdzają, iż uwzględnienie w modelu zawartości ziaren łamanych w kruszywie mogłoby znacząco poprawić jego dokładność i określają tego typu badania jako kolejny etap rozwoju modelu.

## 5. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA MODELI

Dane do przykładu obliczeniowego pochodzą z programu badawczego wykonanego na zlecenie Departamentu Transportu stanu Wisconsin [28]. Autorem raportu opublikowanego w 2010 roku jest R. Bonaquist. Do wykonania przykładu wybrano dane dotyczące mieszanki E10 (źródło: Christian/Gade) sporządzonej przy wykorzystaniu asfaltu PG 58-28. Oznaczono lub obliczono wszystkie dane wejściowe konieczne do opisywanych modeli. Właściwości asfaltu ( $|G_b^*|$ ,  $\delta_b$ ) zestawiono w Tabl. 3. Dane dotyczące cech mieszanki mineralno-asfaltowej:  $VFA = 61,8\%$ ,  $VMA = 18,6\%$ ,  $V_{beff} = 11,4\%$ ,  $V_a = 7,2\%$ ,  $P_0 = 3,3\%$ ,  $P_4 = 31,0\%$ ,  $P_9 = 11,0\%$ ,  $P_{19} = 0,0\%$ . Dla oznaczonych w laboratorium wartości dynamicznego modułu sztywności i kąta przesunięcia fazowego ( $|E^*|_{DM}$ ,  $\phi_{DM}$ ) uzyskanych z raportu [28] autorzy artykułu obliczyli niepewność pomiaru  $U$  (rozkład  $t$ -Studenta,  $p=95\%$ ,  $n=2$ ) oraz względną niepewność pomiaru  $U_r$ . Dla wartości obliczonych z modeli ( $|E^*|_{Witczak}$ ,  $|E^*|_{Hirsch}$ ,  $\phi_{Hirsch}$ ) obliczono błędy względne  $RE$ . Obliczone wartości zestawiono w Tabl. 4.

Modele Witczaka i Hirscha umożliwiają wykreślenie krzywych wiodących mieszanki mineralno-asfaltowej na podstawie wyników badań asfaltu wykonanych w zróżnicowanych warunkach temperatury i częstotliwości. Na Rys. 5 można zauważyć, że w przypadku badanej konkretnej mieszanki mineralno-asfaltowej w temperaturze 20°C i 35°C wartości uzyskane z obu modeli mieszczą się w granicach niepewno-

Furthermore, properties conventionally determined in a laboratory during tests of asphalt mixtures are applied as input data in the Witczak's model. In this model aggregate is characterized by grading data of an aggregate mix, whereas in the Hirsch's model aggregate is defined by the density of an aggregate mix  $G_{sb}$  which is not always directly determined during tests but it can be calculated basing on density tests of applied aggregates (usually provided by an aggregate manufacturer), and their percentage content in a mix according to [27]. The authors of the latest Witczak's model have informed in the publication [6] that taking into account in the model the content of crushed particles in aggregate could considerably improve its accuracy. Moreover, they have described such a type of tests as an another step forward of development of the model.

## 5. EXAMPLE OF THE APPLICATION OF MODELS

Data for the computational example come from the research programme carried out by an order of the Wisconsin Department of Transportation [28]. R. Bonaquist was the author of the appropriate report published in 2010. Data concerning the mixture E10 (source: Christian/Gade) prepared with the use of bitumen PG 58-28 were applied to carry out the example. All input data necessary for the described models were determined or calculated. The properties of bitumen ( $|G_b^*|$ ,  $\delta_b$ ) were set up in Table 3. Data concerning properties of the asphalt mixture were as follows:  $VFA = 61.8\%$ ;  $VMA = 18.6\%$ ;  $V_{beff} = 11.4\%$ ;  $V_a = 7.2\%$ ;  $P_0 = 3.3\%$ ;  $P_4 = 31.0\%$ ;  $P_9 = 11.0\%$ ;  $P_{19} = 0.0\%$ . The authors of this paper have calculated the measurement uncertainty  $U$  (Student's  $t$ -distribution,  $p = 95\%$ ,  $n = 2$ ), and the relative measurement uncertainty  $U_r$  for the determined in the laboratory values of the stiffness modulus and phase angle ( $|E^*|_{DM}$ ,  $\phi_{DM}$ ) which are taken from report [28]. The relative errors  $RE$  were calculated for the values determined from models ( $|E^*|_{Witczak}$ ,  $|E^*|_{Hirsch}$ ,  $\phi_{Hirsch}$ ). The suitable values were put together in Table 4.

The Witczak's and Hirsch's models enable drawing up master curves of the asphalt mixture on the grounds of test results of bitumen carried out in diversified thermal and frequency conditions. It can be observed in Fig. 5 that values received from both models contain within the limits of measurement uncertainty for the tested specific asphalt mixture at temperatures of 20°C and 35°C, while relative errors of these values are small in comparison with the measurement uncertainty. It was discovered at a temperature of 4°C that the values determined with the use of the

Table 3. Test results of bitumen and asphalt mixture (based on [28])  
 Tablica 3. Wyniki badań asfaltu i mieszanki mineralno-asfaltowej (na podstawie [28])

Temperature Temperatura	Frequency Częstotliwość	$ G_b^* $	$\delta_b$	$ E^* _{DM}$	$U E^* _{DM}$	$U_r E^* _{DM}$	$\phi_{DM}$	$U(\phi)$	$U_r(\phi)$
[°C]	[Hz]	[Pa]	[deg] / [°]	[MPa]	[MPa]	[%]	[deg] / [°]	[deg] / [°]	[%]
4	10	17953255.15	43.2	10401	1279	12.3	13.95	0.64	4.6
4	1	5341367.47	51.6	7151	1318	18.4	18.75	0.64	3.4
4	0.1	1288629.90	59.5	4485	1318	29.4	23.85	0.64	2.7
20	10	1233471.85	59.7	4222	2593	61.4	26.60	6.35	23.9
20	1	244074.36	66.7	2207	1686	76.4	30.80	7.62	24.8
20	0.1	40679.06	72.6	1067	1056	98.9	32.10	8.89	27.7
35	10	104800.29	69.7	1502	850	56.6	32.35	0.64	2.0
35	1	16547.41	75.0	704	442	62.8	28.65	0.64	2.2
35	0.1	2068.43	79.1	417	280	67.2	21.75	3.18	14.6

Table 4. The dynamic stiffness modulus and phase angle calculated with the use of analysed models  
 Tablica 4. Dynamiczny moduł sztywności i kąt przesunięcia fazowego obliczone z zastosowaniem analizowanych modeli

Temperature Temperatura	Frequency Częstotliwość	$ E^* _{Witczak}$	$RE( E^* )$ (DM, Witczak)	$ E^* _{Hirsch}$	$RE( E^* )$ (DM, Hirsch)	$\phi_{Hirsch}$	$RE(\phi)$ (DM, Hirsch)
[°C]	[Hz]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]	[deg] / [°]	[%]
4	10	15585	49.8	11361	9.2	15.68	12.4
4	1	9750	36.3	7853	9.8	21.66	15.5
4	0.1	5248	17.0	4551	1.5	28.65	20.1
20	10	5145	21.9	4468	5.8	28.85	8.5
20	1	2413	9.3	2144	2.9	34.52	12.1
20	0.1	1063	0.4	899	15.8	35.76	11.4
35	10	1626	8.3	1425	5.1	35.84	10.8
35	1	728	3.4	586	16.8	34.17	19.3
35	0.1	350	16.2	288	31.1	28.34	30.3

ści pomiaru, a błędy względne tych wartości w stosunku do niepewności pomiaru są niewielkie. W przypadku badań mieszanki w temperaturze 4°C zaobserwowano, że wartości obliczone z zastosowaniem modelu Hirscha wykazują dobre dopasowanie, natomiast wartości uzyskane z modelu Witczaka (przy częstotliwości 1 Hz i 10 Hz) są znacząco większe od wyników badań laboratoryjnych.

## 6. WNIOSKI

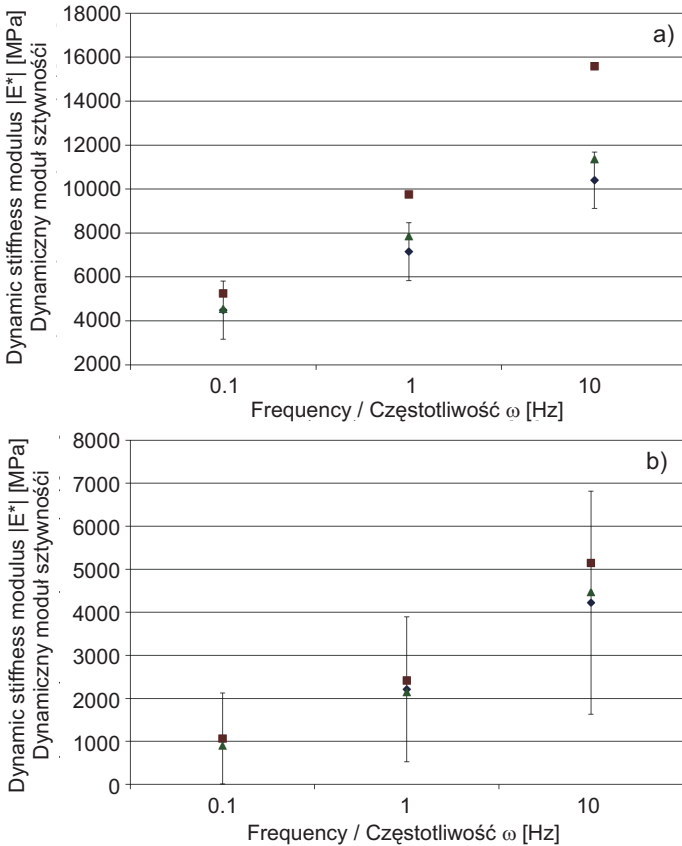
W pracach [29-30] można spotkać także inne modele niż analizowane w niniejszym artykule, w tym modele oparte na sieciach neuronowych. Jednak modele Witczaka i Hirscha są modelami stosowanymi najczęściej, ponieważ zostały sprawdzone na wielu mieszankach mineralno-asfaltowych

Hirsch's model revealed successful adjustment when the values received from the Witczak's model (at frequencies of 1 Hz and 10 Hz) were much higher than results of laboratory tests.

## 6. CONCLUSIONS

Other models including examples based on artificial neural network but not analysed in the present paper can be found in the literature [29-30]. However, the Witczak's and Hirsch's models are the most frequently applied examples because they have been tested in many asphalt mixtures with various types of bitumen, also modified ones. They have been worked out for determining stiffness moduli by the dynamic modulus test (DM) universally

z różnymi typami asfaltów, także modyfikowanych. Modele te zostały opracowane w celu określania modułu sztywności oznaczanego metodą osiowego ściskania dynamicznego (DM) stosowanej powszechnie w USA, jednak w pracy [31] podjęto próby dostosowania modelu Witczaka do określania modułu sztywności oznaczanego metodą belki zginanej (4PB-PR), która jest dominującą metodą oznaczania modułu sztywności w Europie.



applied in the United States, yet some attempts at adjusting the Witczak's model to determining the stiffness modulus defined by the four point bending test (4PB-PR) have been presented in the paper [31]. That procedure makes a dominant way of determining stiffness moduli in Europe.

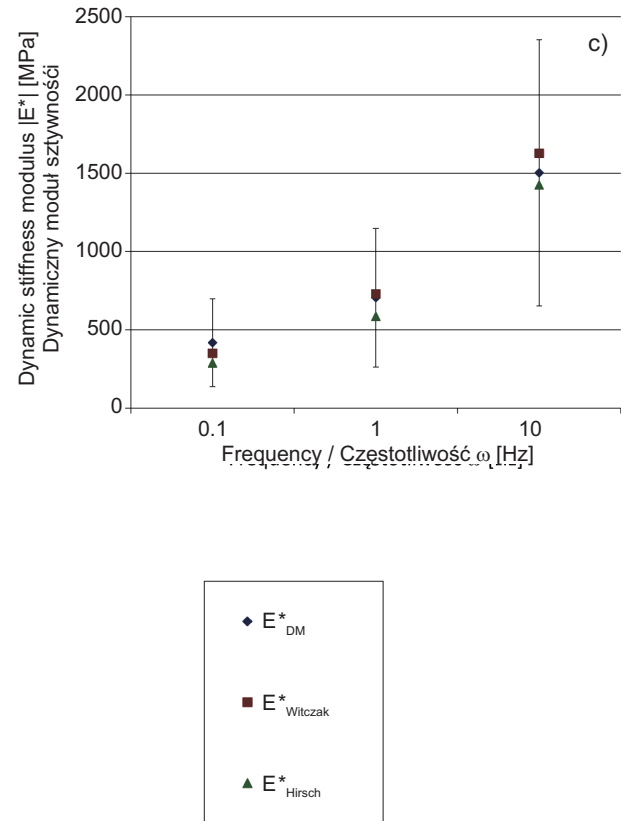


Fig. 5. The comparison of values of stiffness moduli determined with the use of empirical methods with their equivalents calculated according to applied models (on the grounds of [28]), if: a) 4°C, b) 20°C, c) 35°C

Rys. 5. Porównanie wartości modułów sztywności oznaczonych metodami empirycznymi z obliczonymi według zastosowanych modeli (na podstawie [28]) w przypadku, gdy: a) 4°C, b) 20°C, c) 35°C

Poprawność prezentowanych modeli sprawdzono na wybranej mieszance mineralno-asfaltowej. Do wykonania tego przykładu obliczeniowego wykorzystano dane z pracy [28]. Dla wybranej mieszanki mineralno-asfaltowej obliczone wartości dynamicznego modułu sztywności z modeli analityczno-empirycznych są zgodne z wynikami badań laboratoryjnych. Wyjątkiem są wartości uzyskane z modelu Witczaka w temperaturze 4°C. Może to potwierdzać wnioski autorów modelu zawarte w publikacji [6], w której podano, że model Witczaka mniej dokładnie odwzorowuje wartości modułów sztywności w niskiej temperaturze.

The correctness of presented models was checked on a selected asphalt mixture. Data of the work [28] were used to carry out that computational example. The determined values of the dynamic stiffness modulus for a selected asphalt mixture from the analytical-empirical models are in accordance with results of laboratory researches. The values received from the Witczak's model at a temperature of 4°C make an exception to the rule. It can confirm conclusions of the authors of the model contained in [6] which maintains that the Witczak's model does not reproduce precisely enough values of stiffness moduli at low temperatures.

Moduł sztywności charakteryzuje mieszankę mineralno-asfaltową w sposób całościowy, tzn. uwzględnia wiele czynników związanych z wytwarzaniem oraz wbudowaniem mieszanki, na przykład sposób zagęszczenia oraz uzyskane wartości wskaźnika zagęszczenia próbki [32-33]. Dlatego proces zagęszczania próbek mieszanki mineralno-asfaltowej jest szczególnie istotny. Zagęszczanie próbek powinno odbywać się w sposób powtarzalny i jak najbardziej zbliżony do standardowych procedur przyjętych w modelach Witczaka i Hirscha.

The stiffness modulus characterizes the asphalt mixture in a comprehensive way, i.e. taking into account many factors connected with its manufacturing and placing, namely the compaction way and acquired values of the sample compaction index [32-33]. That is why the process of compacting samples of asphalt mixtures is particularly significant. Compacting samples should take place in a repeatable and mostly comparable way to the standard procedures adapted in the Witczak's and Hirsch's models.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Iwański M., Mazurek G.*: Wpływ wosku syntetycznego na moduł sztywności betonu asfaltowego. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **11**, 3, 2012, 233-248
- [2] *Požarycki A., Górnaś P., Zalewski P.*: Wpływ spękań na zmianę modułów sztywności mieszanek mineralno-asfaltowych oznaczanych w warunkach in situ. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **14**, 4, 2015, 257-270
- [3] *Požarycki A., Górnaś P.*: Funkcja sum harmoniczných w skróconej procedurze oznaczania zespolonego modułu sztywności MMA. *Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury*, z. 63, nr 1/II, 2016, 283-290
- [4] *Požarycki A., Fengier J., Górnaś P., Wanatowski D.*: Backcalculation of pavements incorporating Grouted Macadam technology. *Road Materials and Pavement Design*, 2017, 1-17, doi: 10.1080/14680629.2017.1310668
- [5] *Kim Y.R.*: Modeling of asphalt concrete, McGraw-Hill Construction, Washington 2009
- [6] *Bari J., Witczak M.*: Development of a new revised version of the Witczak E\* predictive model for hot mix asphalt mixtures. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, **75**, 2006, 381-423
- [7] *Bonnaure F., Gest G., Garvois A., Uge P.*: A new method of predicting the stiffness of asphalt paving mixes. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, **46**, 1977, 64-104
- [8] *Witczak M.W., Kaloush K., Pellinen T., El-Basyouny M., VonQuintus H.*: Simple Performance Test for Superpave Mix Design. NCHRP Report 465, Transportation Research Board, Washington, 2002
- [9] *Huang Y.H.*: Pavement Analysis and Design Pearson Education. Upper Saddle River, NJ, USA, 2004
- [10] *Witczak M.W., Andrei D., Mirza W.*: Development of Revised Predictive Model for the Dynamic (Complex) Modulus of Asphalt Mixtures. Interteam Technical Report, NCHRP Project 1-37A, University of Maryland, 1999
- [11] *Hirsch T.J.*: Modulus of elasticity of concrete as affected by elastic moduli of cement paste matrix and aggregate. *Journal of the American Concrete Institute*, **59**, 1962, 427-451
- [12] *Christensen D.W., Pellinen T., Bonaquist R.F.*: Hirsch Model for Estimating the Modulus of Asphalt Concrete. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, **72**, 2003, 97-121
- [13] *Van der Poel C.*: A general system describing the visco-elastic properties of bitumens and its relation to routine test data. *Journal of Applied Chemistry*, **4**, 5, 1954, 221-236
- [14] PN-EN 12697-26:2007 Mieszanki mineralno-asfaltowe - Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco - Część 26: Sztywność
- [15] Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide (MEPDG-1). A manual of practice. American Association of State Highway and Transportation, USA 2008
- [16] AASHTO T 342 Determining Dynamic Modulus of Hot Mix Asphalt (HMA), AASHTO Standard Method, Washington, 2011
- [17] *Słowik M., Bartkowiak M.*: Calculation of Measurement Uncertainty for Stiffness Modulus of Asphalt Mixture. *Journal of Civil Engineering and Architecture* **9**, 11, 2015, 1325-1333
- [18] PN-EN 12697-33:2008 Mieszanki mineralno-asfaltowe - Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco - Część 33: Przygotowanie próbek zagęszczonych urządzeniem wałującym
- [19] AASHTO T 312 Preparing and Determining the Density of Asphalt Mixture Specimens by Means of the Superpave Gyrotory Compactor. AASHTO Standard Method, Washington, 2014
- [20] AASHTO R 30 Mixture Conditioning of Hot Mix Asphalt (HMA). AASHTO Standard Method, Washington, 2010

- [21] *Dougan Ch.E., Stephens J.E.* and others: E\* - Dynamic Modulus, Test protocol - Problems and solutions, University of Connecticut, Connecticut, 2003
- [22] *Kim K.S.*: Complex Modulus from indirect tension testing. Master's thesis, University of Florida, Gainesville 2002
- [23] *Kim Y.R., Seo Y., King M., Momen M.*: Dynamic Modulus Testing of Asphalt Concrete in Indirect Tension Mode. TRB Annual Meeting, Washington, USA, 2004
- [24] *Momen M.*: Complex Modulus Determination of Asphalt Concrete Using Indirect Tension Test, master's thesis, North Carolina State University, Raleigh, 2004
- [25] *Martinez F.O., Angelone S.M.*: The indirect tensile test configuration in the determination of the complex modulus of asphalt mixtures. 5<sup>th</sup> Eurasphalt & Eurobitume Congress, Istanbul, June 2012, P5EE-327
- [26] PN-EN 12697-8:2005 Mieszanki mineralno-asfaltowe - Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco - Część 8: Oznaczanie zawartości wolnej przestrzeni
- [27] PN-EN 12697-5:2010 Mieszanki mineralno-asfaltowe - Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco - Część 5: Oznaczanie gęstości
- [28] *Bonaquist R.*: Wisconsin Mixture Characterization Using the Asphalt Mixture Performance Tester (AMPT) on Historical Aggregate Structures. Wisconsin Department of Transportation, Sterling, 2010
- [29] *Kim Y.R.* and others: Long-Term Pavement Performance (LTPP) Computed Parameter: Dynamic Modulus. U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, McLean, 2011
- [30] *Yang X., You Z.*: New predictive equations for dynamic modulus and phase angle using a nonlinear least-squares regression model. *Journal of Materials in Civil Engineering*, **27**, 3, 2015, 04014131-1 - 04014131-8
- [31] *Giuliana G., Nicolosi V., Festa B.*: Predictive Formulas of Complex Modulus for High Air Void Content Mixes. 91<sup>st</sup> Transportation Research Board (TRB) Annual Meeting, Washington, 2012
- [32] *Dolżycki B., Judycki J.*: Wpływ metod zagęszczania mieszanek mineralno-asfaltowych na wyniki badań ich cech mechanicznych. 52 Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica, 2006, 129-136
- [33] *Plewa A.*: Ocena wpływu wskaźnika zagęszczenia na moduł sztywności betonu asfaltowego. *Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, **3**, 3, 2012, 133-139