



ROMAN NAGÓRSKI¹⁾
PAWEŁ TUTKA²⁾
MAGDALENA ZŁOTOWSKA³⁾

DEFINING THE DOMAIN AND BOUNDARY CONDITIONS FOR FINITE ELEMENT MODEL OF FLEXIBLE ROAD PAVEMENT

DOBÓR OBSZARU I WARUNKÓW BRZEGOWYCH MODELU NAWIERZCHNI DROGOWEJ PODATNEJ W ANALIZIE METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

STRESZCZENIE. W pracy przedstawiono trzy sposoby doboru obszaru skończonego typu walcowego do analizy MES półprzestrzeni warstwowej sprężystej obciążonej obrotowo symetrycznie pionowo na powierzchni kołowej jako modelu mechanicznego nawierzchni drogowej podatnej, zapewniające dla trzech wariantów warunków brzegowych zgodność maksymalnego ugięcia z wartością dokładną dla półprzestrzeni warstwowej przy zachowaniu poprawności wartości kluczowych odkształceń. W pierwszym wariantcie stosuje się standardowe warunki podparcia powierzchni brzegowej obszaru modelowanego MES-em, nieprzesuwne w kierunku prostopadłym do tej powierzchni i przesuwne w kierunku stycznym. Pozostałe dwa warianty wykorzystują elementy półnieskończone – na spodzie wymienionego obszaru i na jego powierzchni bocznej. Dodatkowym efektem sposobu pierwszego jest wyznaczenie wartości dokładnej maksymalnego ugięcia nawierzchni, użyteczne w przypadku zastosowania sposobu drugiego i trzeciego.

SŁOWA KLUCZOWE: dobór obszaru i warunków brzegowych, metoda elementów skończonych, nawierzchnia drogowa podatna, półprzestrzeń warstwowa sprężysta.

ABSTRACT. The paper presents three methods for defining a finite cylindrical-type domain for finite element analysis of an elastic multi-layered half-space subjected to a rotationally symmetric vertical load distributed over a circular area, thus providing a mechanistic model of a flexible road pavement. For three sets of boundary conditions the methods ensure the consistency between the maximum deflection and the exact calculated value for a multi-layered half-space with compromising the accuracy of the key strain values. The first case uses standard support conditions at the finite element model boundaries – fixed in the direction perpendicular to that plane and sliding in the tangential direction. The other two cases use half-infinite elements – at the base and at the side wall of the domain. The first method, as an additional benefit, enables determining the exact value of the maximum deflection of pavement that can be used in the second and in the third of the described methods.

KEYWORDS: defining the domain and boundary conditions, finite element method, flexible road pavement, multi-layered elastic half-space.

DOI: 10.7409/rabdim.017.017

¹⁾ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa; r.nagorski@il.pw.edu.pl (✉)
²⁾ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa; p.tutka@il.pw.edu.pl
³⁾ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa; m.zlotowska@il.pw.edu.pl

1. WSTĘP

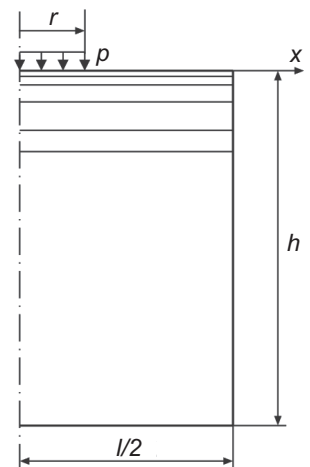
Warstwowa półprzestrzeń materialna jest głównym modelem mechanicznym nawierzchni drogowej podatnej, wykorzystywanym w analizie nawierzchni wykonywanej przy jej projektowaniu (wymiarowaniu). Jeżeli do wyznaczenia kluczowych przemieszczeń, odkształceń i naprężeń stosujemy Metodę Elementów Skończonych (MES), to konieczne jest wyróżnienie we wspomnianej półprzestrzeni ograniczonego obszaru \mathcal{V} modelowanego siatką elementów skończonych i przyjęcie właściwych warunków brzegowych (WB) na granicy tego obszaru. W podstawowym, założonym w pracy, przypadku analizy półprzestrzeni o warstwach sprężystych z materiału Hooke'a, jednorodnych i izotropowych, o stałej grubości („nieskończenie głębokiej” w przypadku warstwy modelującej podłoże gruntowe), obciążonej na powierzchni górnej oddziaływaniem pionowym $P = 50$ kN koła osi standardowej o nacisku 100 kN, modelowanego równomiernym „ciśnieniem” o intensywności $p = 650$ kN rozłożonym na powierzchni kołowej o promieniu $r = 0,1565$ m, zakłada się obszar \mathcal{V} jako walcowy, parametryzowany współrzędnymi walcowymi (ρ, φ, z) , o osi symetrii prostopadłej do powierzchni obciążenia, przechodzącej przez środek tej powierzchni, przy czym oś ρ pokrywa się z osią x dla $\varphi = 0$, a (x, y, z) jest globalnym układem współrzędnych kartezjańskich. Z uwagi na obrotową symetrię układu „półprzestrzeń – obciążenie” w obszarze \mathcal{V} do modelowania MES wystarczy przyjąć półpłaszczyznę \mathcal{P} wyznaczoną przez osie x i z (Rys. 1).

Fig. 1. Cross-section area of the cylindrical domain modelled with finite element method
Rys. 1. Przekrój obszaru walcowego modelowanego metodą elementów skończonych

Do wyznaczenia kluczowych przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w obszarze \mathcal{V} wystarczy przyjąć odpowiednie jego rozmiary: średnicę l i wysokość h - oraz dopuszczalne warunki brzegowe. Wartości istotne dla procesu wymiarowania konstrukcji nawierzchni drogowej podatnej, zwłaszcza maksymalne odkształcenie poziome na spodzie warstw asfaltowych ε_a i maksymalne odkształcenie pionowe na górze podłoża gruntowego ε_p , są bardzo bliskie wartościom dokładnym, otrzymanym metodami analitycznymi. Natomiast wartość maksymalna ugięcia powierzchni górnej

1. INTRODUCTION

In the mechanistic design analyses flexible road pavements are represented most often by physical multi-layered half-space. If the finite element method (FEM) is used to determine the key stresses, strains and displacements then it is necessary to define, within the above-mentioned half-space, a bounded domain \mathcal{V} modelled with a FEM grid with appropriate boundary conditions defined at its limits. In the basic case assumed in this study with the half-space composed of uniform and isotropic elastic layers of a material obeying Hook's law of a uniform depth ("infinite" for the layer representing the soil subgrade), loaded by a vertical force of $P = 50$ kN applied on the top surface by a wheel of a standard 100 kN axle modelled with a pressure $p = 650$ kN uniformly distributed over a circular area with a radius of $r = 0.1565$ m, the above-mentioned bounded domain \mathcal{V} is cylindrical in shape, parameterized by cylindrical coordinates (ρ, φ, z) with the axis of symmetry perpendicular to the loading surface and passing through the centre of this surface where ρ axis coincides with x axis for $\varphi = 0$, in a global rectangular coordinate system x, y, z . Owing to the rotational symmetry of the "half-space – load" system it is enough for the purpose of FEM modelling to adopt the half-plane \mathcal{P} defined by axes x and z (Fig. 1).



Moreover, for determining the key stresses, strains and displacements in the domain \mathcal{V} it is enough to define adequate dimensions thereof, namely diameter l and height h and set allowable boundary conditions. The values relevant to dimensioning of a flexible road pavement, especially the maximum horizontal strain at the bottom of asphalt concrete layer ε_a and the maximum vertical strain at the top of the subgrade ε_p are very close to the exact values obtained with analytical methods. However, there is

nawierzchni w na ogół różni się dość znacznie od wartości dokładnej. Aby zapewnić wyniki dostatecznie dokładne uzyskane za pomocą MES, również w odniesieniu do ugięć maksymalnych, w pracy [1] zaproponowano sposób doboru rozmiarów l i h przy warunkach brzegowych jak na Rys. 2 (WB0), przy założeniu, że znamy dokładną wartość maksymalnego ugięcia nawierzchni. Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie sposobu z pracy [1] na przypadek, gdy nie znamy dokładnej wartości maksymalnego ugięcia nawierzchni, przy warunkach brzegowych WB0 oraz na przypadek zastąpienia tych warunków brzegowych elementami półnieskończonymi (warianty WB1 i WB2 – Rys. 3 i 4). Do tego wykorzystano ideowe i skrótowe sformułowanie schematów postępowania zawarte w pracach [2] i [3].

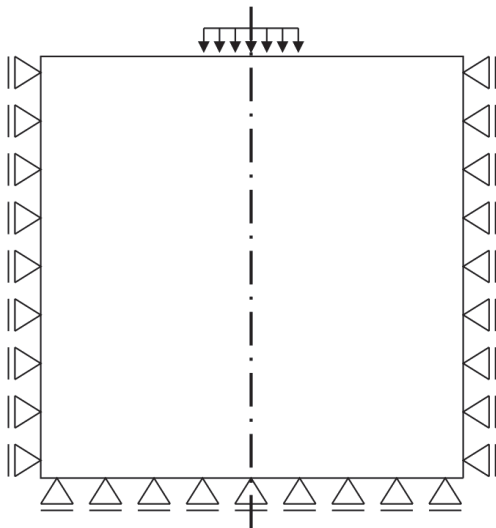


Fig. 2. Example of admissible boundary conditions - basic case WB0
Rys. 2. Przykład dopuszczalnych warunków brzegowych - wariant podstawowy WB0

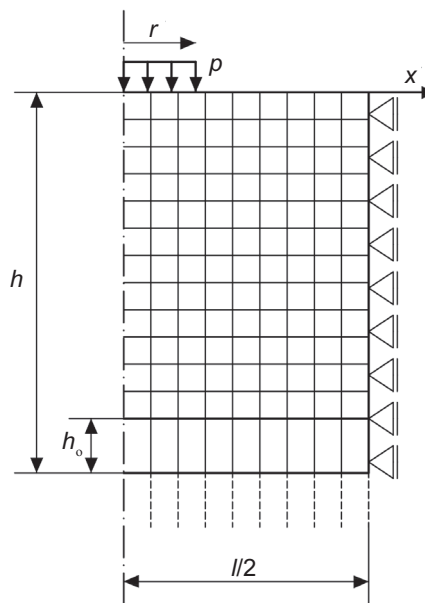


Fig. 3. Schematic of a finite element model with infinite elements at the base of the domain \mathcal{V} (case WB1)
Rys. 3. Schemat modelu MES z elementami nieskończonymi na spodzie obszaru \mathcal{V} (wariant WB1)

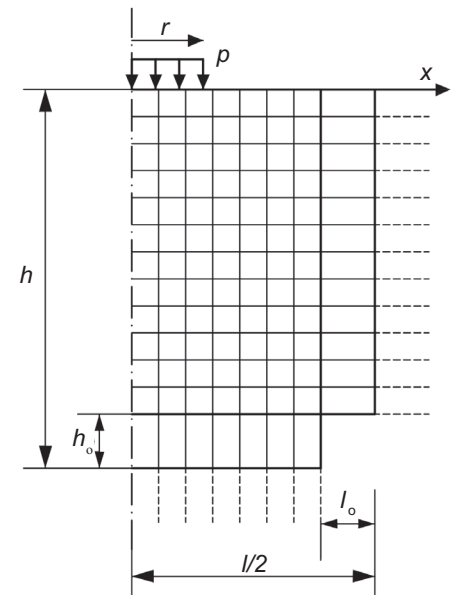


Fig. 4. Schematic of a finite element model with infinite elements at the base and on the side surface of the domain \mathcal{V} (case WB2)
Rys. 4. Schemat modelu MES z elementami nieskończonymi na spodzie i poboczniczy obszaru \mathcal{V} (case WB2)

W pracy [4] rekomendowano przyjęcie $l = 40r$, $h = 140r$ oraz warunków brzegowych jak na Rys. 2 – tyle, że nieprzesuwanych na podstawie dolnej obszaru \mathcal{V} . Jak wynika z analizy porównawczej przedstawionej w rozprawie [5], nie jest konieczne przyjęcie tak znacznych rozmiarów obszaru \mathcal{V} , a wyniki obliczeń dla warunków brzegowych rekomendowanych w pracy [4] (a także w pracach [6], [7]) nie różnią się przy

usually a considerable difference between the exact value and the maximum deflection of the top surface of pavement w . In order to make the values obtained through the finite-element analysis sufficiently accurate also in relation to the maximum deflections a method for defining the values of l and h was proposed in [1] with the boundary conditions the same as given in Fig. 2 (WB0), based on the assumption that the exact value of maximum deflection of pavement is known to us. The objective of the present study is to extend the range of application of the method proposed in [1] to the situations with unknown value of the maximum deflection of pavement using boundary conditions WB0 and to situations in which these boundary conditions are replaced with semi-infinite elements (cases WB1 and WB2 – Fig. 3 and Fig. 4). This has been done with the help of algorithms expressed in a concise form in [2] and [3].

The values recommended in [4] are $l = 40r$, $h = 140r$ in combination with boundary conditions the same as in Fig. 2 yet fixed on the lower limit of the domain \mathcal{V} . According to the comparative analysis presented in the thesis [5] the domain \mathcal{V} does not have to be as big as that and the results of calculations performed for the boundary conditions recommended in [4] (as well as in [6] and [7]) do not

dostatecznie dużych l i h od wyników obliczeń dla warunków brzegowych jak na Rys. 2. Z drugiej strony, w pracy [6] przyjęto do modelowania MES obszar o rozmiarach zaledwie $l = 0,9$ m i $h = 0,825$ m, które w świetle rozprawy [5] wydają się zbyt małe. Elementy nieskończone na granicach obszaru \mathcal{V} założono w pracy [4] głównie w celu redukcji rozmiarów tego obszaru, a w pracy [6] w celu zapewnienia dokładności obliczeń.

Główną przesłanką rozważania elementów nieskończonych do modelowania w MES warunków brzegowych na granicach obszaru \mathcal{V} w niniejszej pracy jest przydatność do „pochłaniania” fali zaburzenia w ośrodku nieskończonym przy zastosowaniu MES w zagadnieniach dynamicznych (będących przedmiotem innych prac). Idea zastosowania elementów nieskończonych opisana jest w pracy [8]. Dominującym w literaturze podejściem jest rozpatrywanie dynamicznego obciążenia nawierzchni dla skończonego wymiarowego modelu numerycznego [9]. Pozwala to osiągnąć poprawne wyniki w typowych rodzajach obciążeń od pojazdu kołowego. Próbą uniknięcia zjawiska odbicia fali na granicy ośrodka jest zastosowanie modelu o rozmiarach wystarczająco dużych, aby w trakcie analizy uniknąć odbicia fali [10]. W pewnych przypadkach np. przy udarowym obciążeniu nawierzchni i dłuższym czasie analizy, rola efektów dynamicznych jest jednak znacząca i wymusza stosowanie elementów nieskończonych [11-12]. Więcej informacji dotyczących kwestii niezbędnej wielkości obszaru \mathcal{V} , warunków brzegowych na jego granicach oraz innych założeń niezbędnych w zastosowaniu MES do analizy warstwowej półprzestrzeni materialnej, jako modelu nawierzchni drogowej podatnej (kształt siatki elementów skończonych, stopień aproksymacji pola przemieszczeń i rozmiar elementów skończonych), zamieszczono w rozprawie [5]. Sformułowane w tej rozprawie rekomendacje wykorzystano w artykule. Warto jeszcze zwrócić uwagę na pracę [13], w której do modelowania MES przyjęto obszar w kształcie czaszy kulistej.

2. DOBÓR OBSZARU MODELOWANEGO MES PRZY PODSTAWOWYM WARIANCIE WARUNKÓW BRZEGOWYCH

W pracy [1] zauważono, że przy warunkach brzegowych podstawowych (Rys. 2) dla ustalonej szerokości obszaru l , wykres zależności maksymalnego ugięcia, wyznaczonego za pomocą MES przy wykorzystaniu programu ABAQUS [14], od przyjętej wysokości h obszaru \mathcal{V} jest z dużą dokładnością prostoliniowy, to jest (Rys. 3):

$$w = w_l(h) = a_l h + b_l . \quad (1)$$

Jeżeli znamy dokładną wartość maksymalnego ugięcia w_d obszaru \mathcal{V} (pod obciążeniem pionowym), to z równości (1)

depart from the results obtained for the boundary conditions as given in Fig. 2 as long as the values of l and h are sufficiently high. On the other hand, the domain used for the finite-element model in [6] is only $l = 0.9$ m by $h = 0.825$ m in size which, according to [5], is an insufficient size of the domain. Infinite elements were defined at the limits of domain \mathcal{V} to reduce the domain size (in [4]) or to improve the accuracy of results (in [6]).

The main reason for considering infinite elements for modelling boundary conditions at the boundaries of domain \mathcal{V} of the finite-element model built in this study is their capability to “absorb” a disturbance wave propagating through an infinite medium in dynamic analyses (performed by others). The idea of infinite elements application is described in [8]. The prevailing approach used in the previous researches was to consider dynamic loading of pavement for a finite-dimensional numerical model [9]. In this manner correct results can be obtained in typical loading cases with the loads imposed by wheeled vehicles. Defining sufficiently large sizes can be a way to exclude from consideration the reflection of wave at the end of medium [10]. However, in some situations, such as impact loading of the pavement and longer time-span of the analysis, infinite elements should be used due to a significant role of dynamic effects [11-12]. For more information on the required size of domain \mathcal{V} , boundary conditions at the domain limits and other input assumptions required to be made for finite-element analysis of a physical multi-layered half-space model of a flexible road pavement (grid shape, displacement field approximation level and the finite elements sizes) [5]. The recommendations formulated therein are used in this paper. Attention is also drawn to [13] where a spherical cap domain is assumed in the finite-element analysis.

2. DEFINING A FINITE ELEMENT DOMAIN WITH THE BASIC CASE OF BOUNDARY CONDITIONS

According to [1] with the basic boundary conditions (Fig. 2) for the defined domain width l the relationship between the maximum deflection obtained with finite-element method in ABAQUS [14] and the adopted height h of domain \mathcal{V} is linear with a high accuracy and, as such (Fig. 3):

Knowing the exact value of the maximum deflection w_d of domain \mathcal{V} (under a vertical load) the equation (1) yields,

dla danej szerokości l przy $w = w_d$ znajdujemy wartość wysokości h_d , zapewniającą zgodność tego ugięcia z otrzymanym na podstawie MES.

Drugim kluczowym spostrzeżeniem było stwierdzenie, że zależność pomiędzy wysokością h_d obszaru \mathcal{V} , a jego szerokością l jest liniowa [1] (Rys. 5):

$$h_d = cl, \quad (2)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności c jest zależny jedynie od struktury układu warstw analizowanego ośrodka.

Jeżeli nie znamy dokładnej wartości w_d , to możemy zapisać układ równań (na podstawie (1), (2) oraz Rys. 5 i 6):

$$\begin{aligned} w_d &= a_1 h_{1d} + b_1, \quad w_d = a_2 h_{2d} + b_2, \\ \frac{h_{1d}}{l_1} &= \frac{h_{2d}}{l_2} = c, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie (Rys. 7):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{w_{B1} - w_{A1}}{h_{B1} - h_{A1}}, & a_2 &= \frac{w_{B2} - w_{A2}}{h_{B2} - h_{A2}}, \\ b_1 &= w_{A1} - \frac{w_{B1} - w_{A1}}{h_{B1} - h_{A1}} h_{A1}, & b_2 &= w_{A2} - \frac{w_{B2} - w_{A2}}{h_{B2} - h_{A2}} h_{A2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Przyjmując wartości l_1, h_{A1}, h_{B1} wyznaczamy wartości ugięć maksymalnych w_{A1}, w_{B1} , korzystając z MES i odpowiedniego programu obliczeń oraz, podobnie, przyjmując wartości l_2, h_{A2}, h_{B2} wyznaczamy wartości ugięć maksymalnych w_{A2}, w_{B2} (przyjmowane wartości powinny być na tyle duże, by zapewnić dostateczną dokładność i równość wyznaczonych odkształceń ε_a i ε_p). Następnie obliczamy współczynniki (4), a na podstawie (3) znajdujemy:

$$\begin{aligned} w_d &= \frac{b_1 l_2 a_2 - b_2 l_1 a_1}{l_2 a_2 - l_1 a_1}, & c &= \frac{b_1 - b_2}{l_2 a_2 - l_1 a_1}, \\ h_{d1} &= \frac{l_1 (b_1 - b_2)}{l_2 a_2 - l_1 a_1}, & h_{d2} &= \frac{l_2 (b_1 - b_2)}{l_2 a_2 - l_1 a_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ostatecznie do szczegółowych obliczeń służących analizie półprzestrzeni warstwowej (nawierzchni drogowej), przyjmujemy l_1, h_{d1} lub l_2, h_{d2} lub też inną parę wielkości l, h_d zgodnie ze wzorami (2) i (5₂).

Poniżej przedstawiony zostanie przykład zastosowania wyżej opisaney metody określenia rozmiarów obszaru \mathcal{V} wraz z weryfikacją uzyskanych wyników, przyjmując:

$$h_1 = 8.0 \text{ m}, \quad h_{A1} = 6.0 \text{ m}, \quad h_{B1} = 10.0 \text{ m}, \quad l_2 = 12.0 \text{ m}, \quad h_{A2} = 6.0 \text{ m}, \quad h_{B2} = 10.0 \text{ m}. \quad (6)$$

for a given width l for $w = w_d$ the value of height h_d for which the deflection is consistent with the value obtained in the finite-element analysis.

The second key observation made by the authors is that the relationship between the height h_d and width l of domain \mathcal{V} is linear [1] (Fig. 5):

with the proportionality constant c depending only on the arrangement of layers of the analysed structure.

With unknown exact value of w_d we can write the following system of equations (based on (1), (2) and Figs. 5 and 6):

where (Fig. 7):

By adopting the values of l_1, h_{A1}, h_{B1} the maximum deflections w_{A1}, w_{B1} can be obtained through finite-element analysis and using appropriate computational program and, similarly, by adopting the values of l_2, h_{A2}, h_{B2} we can obtain the values of maximum deflections w_{A2}, w_{B2} (note that the adopted values should be sufficiently high in order to obtain the desired accuracy and uniformity of the calculated strains ε_a and ε_p). Next factors (4) are calculated and, on the basis of (3), we obtain:

Finally, the values of l_1, h_{d1} or l_2, h_{d2} or any other pair of l, h_d parameters are adopted for the detailed calculations related to the analysis of a multi-layered half-space (road pavement) in accordance with equations (2) and (5₂).

An example application of the above-described method of determining the dimensions of domain \mathcal{V} including verification of results would be shown below, for the following input data:

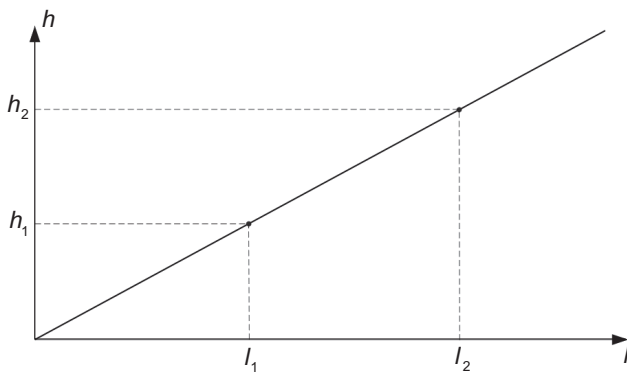


Fig. 5. Relationship between a correctly defined height h_d of the domain ψ and its width l
Rys. 5. Zależność poprawnie dobranej wysokości h_d obszaru ψ od jego szerokości l

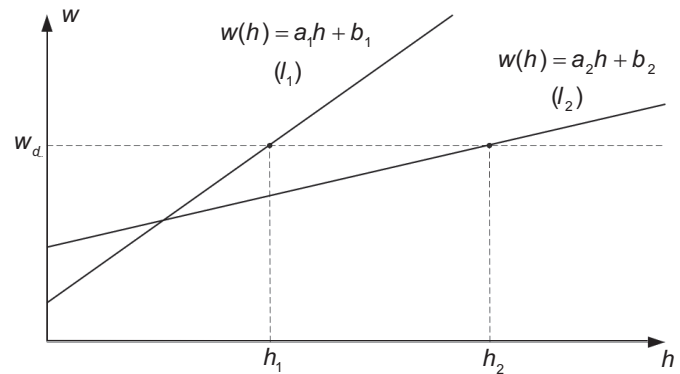


Fig. 6. Maximum deflections of pavement w obtained through finite element analysis, depending on the height h of the domain ψ at two different domain widths: l_1 and l_2
Rys. 6. Maksymalne ugięcia nawierzchni w otrzymane MES w zależności od wysokości h modelowanego obszaru ψ przy dwóch różnych szerokościach l_1 i l_2 tego obszaru

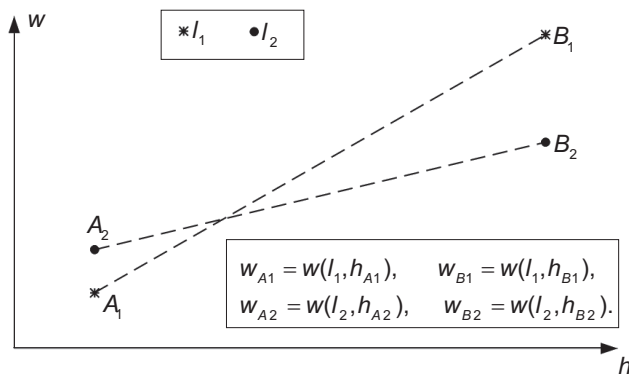


Fig. 7. Maximum deflection of pavement w obtained through finite element analysis depending on the height h of the domain ψ at two different domain widths: l_1 and l_2
Rys. 7. Maksymalne ugięcie nawierzchni w na podstawie MES w zależności od wysokości h obszaru ψ przy dwóch różnych szerokościach l_1 i l_2 tego obszaru

Dane materiałowo-geometryczne analizowanej nawierzchni i jej parametrów mechanicznych zestawiono w Tabl. 1. Lepiszce asfaltowe charakteryzuje się zależnością własności mechanicznych od temperatury. Przyjęte dane właściwe są dla temperatury ekwiwalentnej nawierzchni równej 10°C . Analiza rozkładu temperatury w nawierzchni przedstawiona jest w pracy [15]. Warstwy asfaltowe przyjęto jako sprężyste - materiał Hooke'a. Podejście to dominuje w zagadnieniach związanych z wyznaczaniem stanu przemieszczeń i odkształceń nawierzchni drogowej. W szczególnych przypadkach stosowane są modele materiałowe uwzględniające lekko sprężyste lub nawet plastyczne własności materiałowe [16-18].

Obliczenia za pomocą MES wykonano przy użyciu programu ABAQUS/Standard (do obliczeń statycznych). Przyjęto elementy o kwadratowych funkcjach kształtu przeznaczone do zadań obrotowo symetrycznych z całkowaniem zredukowanym (CAX8R). Siatkę elementów skończonych tworzą elementy prostokątne o minimalnym rozmiarze boku $0,01\text{ m}$ pod miejscem przyłożenia obciążenia, zwiększane do elementów o rozmiarze maksymalnym $0,2\text{ m}$ (w pobliżu

The pavement cross-section data and mechanical parameters are given in Table 1. The mechanical properties of the bitumen binder vary with the temperature. The input data are correct for the equivalent temperature of pavement of 10°C . The analysis of temperature distribution across the pavement cross-section is presented in [15]. The bituminous layers are treated as an elastic material obeying Hook's law. This is the most often used approach in analyses involving determination of displacement and strain states of road pavements. Models considering visco-elastic or even plastic properties of materials are used only in specific situations [16-18].

The finite-element calculations were performed in ABAQUS/Standard software platform designated for static analyses. Elements with quadratic shape functions and reduced integration were adopted (type CAX8R) which are designated for problems involving rotational symmetry. The finite-element grid is made up of rectangular elements with a minimum side length of 0.01 m under the load application point, increasing to the maximum of 0.2 m towards the domain limit. The values obtained with

granicy obszaru). Wyniki obliczeń referencyjnych otrzymano przy wykorzystaniu programu VEROAD [19], można je traktować jako dokładne. Całość wyników zestawiono w Tabl. 2.

VEROAD software [19] were used as exact reference values. All the results are compiled in Table 2.

Table 1. Geometric and mechanical data of the pavement layers
Tablica 1. Dane geometryczne i mechaniczne dla poszczególnych warstw nawierzchni

Layer / Warstwa	Young modulus Moduł Younga [MPa]	Poisson's ratio Współczynnik Poissona [-]	Layer thickness Grubość warstwy [cm]
SMA wearing course / Warstwa ścieralna z SMA	9800	0.30	4
Asphalt concrete binder course / Warstwa wiążąca z betonu asfaltowego	11500	0.30	6
Asphalt concrete base course / Podbudowa z betonu asfaltowego	10900	0.30	12
Compacted aggregate base course / Podbudowa z kruszywa łamanego niezwiązanego	400	0.30	20
Cement-treated subgrade / Podłoże gruntowe stabilizowane cementem	300	0.30	15
Natural soil subgrade / Podłoże gruntowe rodzime	100	0.35	∞

Table 2. Maximum deflections and key strains for the pre-defined sizes of domain \mathcal{V} (basic case of boundary conditions WB0)

Tablica 2. Maksymalne ugięcia i kluczowe odkształcenia dla wybranych rozmiarów obszaru \mathcal{V} (przypadek podstawowy warunków brzegowych WB0)

Calculation method and input data case Wariant obliczeń i danych	l [m]	h [m]	w [mm]	ε_a [10^{-6}]	ε_p [10^{-6}]
VEROAD	–	–	w : 0.241	62.42	-164.49
FEM / MES	l_1 : 8.0	h_{A1} : 6.0	w_{A1} : 0.205	62.44	-163.99
FEM / MES	l_1 : 8.0	h_{B1} : 10.0	w_{B1} : 0.230	62.44	-163.99
FEM / MES	l_2 : 12.0	h_{A2} : 6.0	w_{A2} : 0.208	62.48	-164.44
FEM / MES	l_2 : 12.0	h_{B2} : 10.0	w_{B2} : 0.220	62.48	-164.41
FEM / MES	l : 8.0	h_d : 12.13	w_d : 0.243	62.44	-163.99
FEM / MES	l : 8.0	$h_d - h_r$: 6.0	w : 0.243	62.44	-163.98

Rozmiar zadania MES może zostać zredukowany, bez zmiany dokładności wyników obliczeń, poprzez zmniejszenie wysokości h_d o wielkość h_r (zmniejszenie grubości podłoża gruntowego rodzimego), zastępując warunki brzegowe podstawowe na spodzie obszaru \mathcal{V} podparciem sprężystym typu Winklera o współczynniku sztywności sprężystej:

$$k = \frac{E'_{pg}}{h_r}, \quad E'_{pg} = \frac{(1 - \nu_{pg})E_{pg}}{(1 - 2\nu_{pg})(1 + \nu_{pg})}, \quad (7)$$

gdzie E_{pg} jest modułem Younga, a ν_{pg} współczynnikiem Poissona podłoża gruntowego rodzimego [1].

The size of the FEM problem analysed can be reduced without affecting the accuracy of the calculated results by reducing the value of h_d by h_r (meaning reduction of the natural subgrade thickness) by substituting the basic boundary conditions at the base of domain \mathcal{V} with a Winkler spring support with the spring modulus calculated with the following formula:

where E_{pg} is Young's modulus and ν_{pg} is the Poisson's ratio of the soil subgrade [1].

W pracy [1] stwierdzono również, iż jeśli obszar \mathcal{V} o przekroju kołowym o średnicy l zastąpimy obszarem o przekroju o polu A (np. o przekroju prostokątnym w modelu trójwymiarowym MES) i jeśli:

$$A = \frac{\pi l^2}{4}, \quad (8)$$

to przy dostatecznie dużym l i $h = h_d$ otrzymujemy wartości maksymalnego ugięcia i kluczowych odkształceń niemal identyczne.

Zauważmy, że dla przyjętych danych wartości kluczowych odkształceń są prawie identyczne, a wyznaczona wartość dokładna maksymalnego ugięcia prawie pokrywa się z wartością obliczoną programem VEROAD (Tabl. 2).

3. DOBÓR OBSZARU MODELOWANEGO MES Z ELEMENTAMI NIESKOŃCZONYMI NA SPODZIE TEGO OBSZARU

Rozważmy obrotowo symetryczny model MES obszaru walcowego \mathcal{V} półprzestrzennego ośrodka warstwowego (jako modelu nawierzchni podatnej) z elementami nieskończonymi (CINAX5) na spodzie tego obszaru (wariant WB1, Rys. 3). Jest to element w kształcie półpasma, pięciowęzłowy, o odległości h_0 (w pionie) między węzłami. W przyjętym elemencie funkcje kształtu opisujące pole przemieszczeń określone są z użyciem wyrażenia postaci: $1/r$ oraz $1/r^2$, gdzie r jest współrzędną lokalną wzdłuż „nieskończonego” boku elementu. W takim przypadku dla r zmierzającego do nieskończoności otrzymuje się zerowe przemieszczenia. W ramach elementu wartość minimalna współrzędnej r jest równa 1 co wyklucza wartości nieskończone przemieszczeń [14].

Obliczenia programem ABAQUS/Standard przeprowadzono dla danych geometryczno-materiałowych i obciążeniu ośrodka oraz przy rozmiarach elementów skończonych jak w przypadku warunków brzegowych WB0. Parametrami geometrycznymi modelu są: średnica l i wysokość h obszaru \mathcal{V} oraz parametr h_0 elementów nieskończonych. Otrzymane dla analizowanego przypadku warunków brzegowych (wariant WB1) wartości kluczowych odkształceń są dla przyjętych wartości parametrów geometrycznych bardzo bliskie rozwiązaniu z programu VEROAD. Na Rys. 8 i 9 przedstawiono wykresy maksymalnych ugięć w funkcji wysokości h_0 elementu nieskończonego dla wybranych wartości średnicy l i wysokości h obszaru \mathcal{V} . Rys. 10 i 11 przedstawiają wykresy maksymalnych ugięć w funkcji wysokości h obszaru \mathcal{V} dla wybranych wartości średnicy l obszaru \mathcal{V} i parametru h_0 elementów nieskończonych.

Moreover, according to [1], if we substitute domain \mathcal{V} having a circular cross-section of diameter l with a domain having cross-sectional area A (for example rectangular in shape in a three-dimensional finite-element model) and if:

then with sufficiently high values of l and $h = h_d$ we shall get almost identical values of the maximum deflection and key strains.

Note that for the adopted input data the key strains are almost identical and the obtained exact value of the maximum deflection almost equals the value calculated in VEROAD (Table 2).

3. DEFINING A FINITE-ELEMENT DOMAIN WITH INFINITE ELEMENTS AT ITS BASE

Let us consider a rotationally symmetric finite-element model of a cylindrical domain \mathcal{V} of a half-space multi-layered medium (representing a flexible pavement) with infinite elements (type CINAX5) at its base (case WB1, Fig. 3). CINAX5 is a half-band element with five nodal points spaced by a distance of h_0 (vertically). In the adopted element the functions of shape describing the displacement field are represented by $1/r$ and $1/r^2$ expressions where r is a local co-ordinate along the “infinite” side of the element. Thus zero displacements are obtained as r tends to infinity. Within the element's limits the minimum value of r is 1, this excludes infinite displacements [14].

Calculations in ABAQUS/Standard software platform were conducted for the material types and the geometric data, as well as the medium loading parameters and finite element dimensions the same as applied for the boundary conditions WB0. The geometric parameters of the model are: diameter l and height h of the domain \mathcal{V} and infinite elements' parameter h_0 . The values of key strains obtained for the analysed case WB1 are for the adopted geometric data very close to the solution obtained in VEROAD. Fig. 8 and Fig. 9 present the curves of maximum deflections as a function of infinite element height h_0 for adopted values of diameter l and height h of domain \mathcal{V} . Fig. 10 and Fig. 11 present the curves of maximum deflections as a function of height h of domain \mathcal{V} for the adopted diameter l of domain \mathcal{V} and the infinite elements' parameter h_0 .

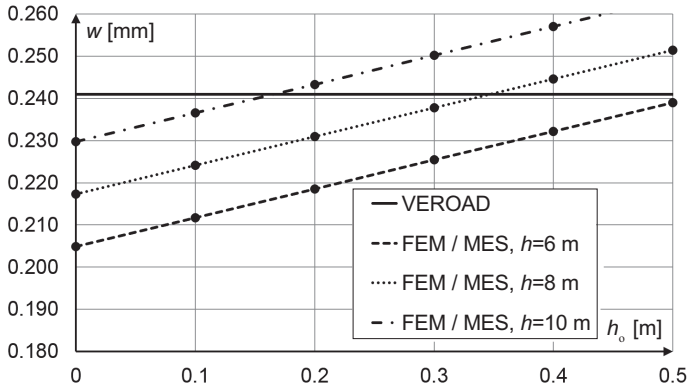


Fig. 8. Maximum deflection as a function of height h_0 of infinite element for $l = 8.0$ m with $h = 6$ m, $h = 8$ m and $h = 10$ m
Rys. 8. Maksymalne ugięcia w funkcji wysokości h_0 elementu nieskończonego dla $l = 8,0$ m przy $h = 6$ m, $h = 8$ m i $h = 10$ m

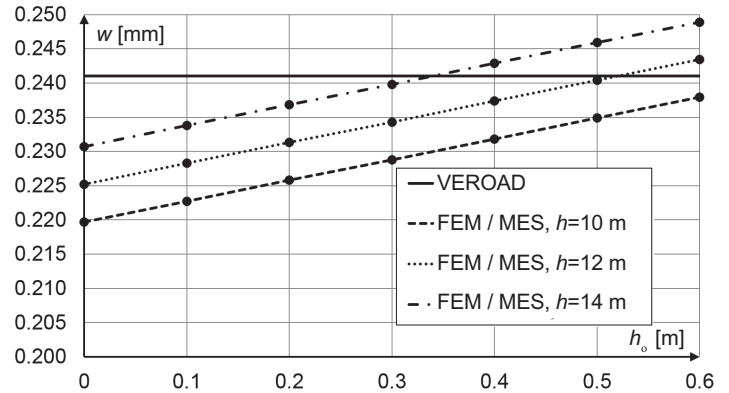


Fig. 9. Maximum deflection as a function of height h_0 of infinite element for $l = 12.0$ m with $h = 10$ m, $h = 12$ m and $h = 14$ m
Rys. 9. Maksymalne ugięcia w funkcji wysokości h_0 elementu nieskończonego dla $l = 12,0$ m przy $h = 10$ m, $h = 12$ m i $h = 14$ m

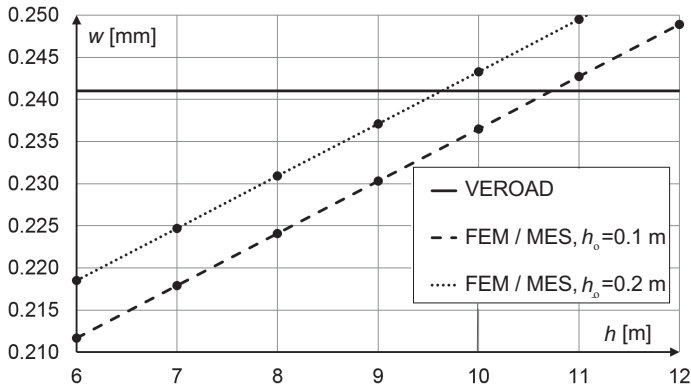


Fig. 10. Maximum deflection as a function of height h of the domain ψ for $l = 8.0$ m with $h_0 = 0.1$ m and $h_0 = 0.2$ m
Rys. 10. Maksymalne ugięcia w funkcji wysokości h obszaru ψ dla $l = 8,0$ m przy $h_0 = 0,1$ m i $h_0 = 0,2$ m

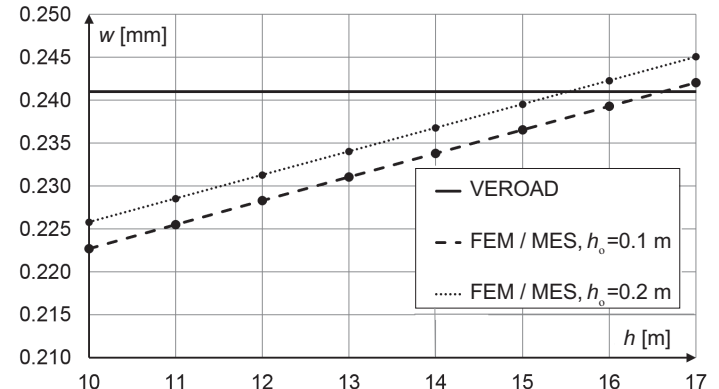


Fig. 11. Maximum deflection as a function of height h of the domain ψ for $l = 12.0$ m with $h_0 = 0.1$ m and $h_0 = 0.2$ m
Rys. 11. Maksymalne ugięcia w funkcji wysokości h obszaru ψ dla $l = 12,0$ m przy $h_0 = 0,1$ m i $h_0 = 0,2$ m

Wobec liniowej zależności (1) pomiędzy maksymalnym ugięciem, a wysokością obszaru ψ przy danym rozmiarze l i wartości h_0 , można przy znajomości dokładnej wartości ugięcia nawierzchni w_d (na przykład, przy wykorzystaniu programu VEROAD lub innego programu tego typu lub też metodą podaną w rozdz. 2) wyznaczyć wysokość h_d , dla której MES z warunkami WB1 na granicy obszaru ψ prowadzi do poprawnych wyników:

$$h_d = \frac{w_d - b_{l,h_0}}{a_{l,h_0}}, \quad (9)$$

where:

$$a_{l,h_0} = \frac{w_{B,l,h_0} - w_{A,l,h_0}}{h_{B,l,h_0} - h_{A,l,h_0}}, \quad b_{l,h_0} = w_{A,l,h_0} - \frac{w_{B,l,h_0} - w_{A,l,h_0}}{h_{B,l,h_0} - h_{A,l,h_0}} h_{A,l,h_0}. \quad (10)$$

gdzie:

Przyjmując, dla przykładu,

$$l = 8.0 \text{ m}, \quad h_{A,l} = 6.0 \text{ m}, \quad h_{B,l} = 10.0 \text{ m}, \quad h_o = 0.2 \text{ m}, \quad (11)$$

oraz pozostałe założenia i dane dotyczące układu warstw półprzestrzeni i jej obciążenia pionowego jak w rozdz. 2, otrzymujemy:

$$w = 0.241 \text{ mm}, \quad \varepsilon_a = 62.39 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_p = -163.99 \cdot 10^{-6}. \quad (12)$$

Zauważmy, że wartości kluczowych odkształceń (12) są w tym przypadku bliskie wartościom tych odkształceń obliczonym programem VEROAD. Niestety w tym wariancie „podparcia” obszaru \mathcal{V} nie stwierdzono zależności postaci (2), co zawęża użyteczność tego wariantu warunków brzegowych w analizie nawierzchni.

4. DOBÓR OBSZARU MODELOWANEGO MES Z ELEMENTAMI NIESKOŃCZONYMI NA GRANICY TEGO OBSZARU

Rozważmy obrotowo-symetryczny model MES obszaru walcowego \mathcal{V} półprzestrzennego ośrodka warstwowego (jako modelu nawierzchni podatnej) z elementami półnieskończonymi (CINAX5) zarówno na spodzie jak i na poboczniczy tego obszaru (wariant WB2, Rys. 4). Obliczenia programem ABAQUS/Standard przeprowadzono dla danych geometryczno-materiałowych i przy obciążeniu ośrodka oraz o rozmiarach elementów skończonych jak w przypadku warunków brzegowych WB0. Parametrami geometrycznymi modelu są: średnica l i wysokość h obszaru \mathcal{V} oraz parametr l_o elementów nieskończonych poziomych i parametr h_o elementów nieskończonych pionowych (Rys. 4). W Tabl. 3-5 przedstawiono wartości maksymalnych ugięć i kluczowych odkształceń dla wybranych wartości parametrów h_o, h i l_o, l . Na Rys. 12-16 przedstawiono przebieg zmienności maksymalnego ugięcia w funkcji wybranego parametru i przy różnych wartościach pozostałych parametrów.

Teraz zależność pomiędzy maksymalnym ugięciem w a wysokością h obszaru \mathcal{V} nie jest liniowa. Ponadto dla wartości l i h podobnych jak w przypadku WB1 ugięcie nie osiąga wartości przemieszczenia dokładnego w_d (Rys. 12-15). Jedynie dla dużych wartości l i h ugięcie maksymalne w zbliża się asymptotycznie do w_d (Rys. 16, Tabl. 5). Takie właśnie wartości l i h można uznać dopiero za właściwe rozmiary obszaru \mathcal{V} zapewniające zgodność wyników obliczeń dokładnych z obliczeniami MES.

Z powyższego wynika, że do obliczeń statycznych nie warto stosować elementów nieskończonych w wariancie WB2. Natomiast mogą one być przydatne w zagadnieniach dynamicznych z obciążeniami udarowymi nawierzchni.

Let us, for example, adopt the following values:

$$l = 8.0 \text{ m}, \quad h_{A,l} = 6.0 \text{ m}, \quad h_{B,l} = 10.0 \text{ m}, \quad h_o = 0.2 \text{ m}, \quad (11)$$

as well as the remaining assumptions and half-space layered system and vertical loading data, as given in chapter 2 above, we obtain:

$$w = 0.241 \text{ mm}, \quad \varepsilon_a = 62.39 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_p = -163.99 \cdot 10^{-6}. \quad (12)$$

Note that the values of key strains (12) are, in this case, close to their counterparts calculated in VEROAD. Unfortunately, relationship (2) was not found for this type of domain \mathcal{V} support system and thus application of this set of boundary conditions is limited in pavement analysis.

4. DEFINING A FINITE-ELEMENT DOMAIN WITH INFINITE ELEMENTS AT ITS LIMITS

Now let us consider a rotationally symmetric finite-element model of a cylindrical domain \mathcal{V} of a half-space multi-layered medium (representing a flexible pavement) with half-infinite elements (type CINAX5) both at the cylinder base and at its side wall (case WB2, Fig. 4). Calculations in ABAQUS/Standard software platform were conducted for the material types and geometric data, as well as the medium loading characteristics and finite element dimensions the same as defined for boundary conditions WB0. The geometric parameters of the model are: diameter l and height h of domain \mathcal{V} and the infinite elements' parameter h_o and l_o . Tables 3-5 give the maximum deflections and the key strain values for the selected values of h_o, h and l_o, l . The curves in Figs. 12-16 represent the change of the maximum deflection as a function of one selected parameter and with different values of the remaining parameters.

In this case the relationship between the maximum deflection w and height h of the domain \mathcal{V} is not linear. Moreover, for the values of l and h similar to the values in the case WB1 the deflection does not reach the exact value of displacement w_d (Figs. 12-15). Only for big values of l and h the maximum deflection w tends asymptotically to the value of w_d (Fig. 16, Table 5). Such values of l and h defining the size of domain \mathcal{V} ensure consistency between the results obtained through exact calculations and through finite-element analysis.

This shows that infinite elements with boundary conditions of case WB2 do not fit the purpose in the case of static calculations. On the other hand, they can be useful in solving dynamic problems where impact loading of pavements occurs.

Table 3. Maximum deflections and key strains for the pre-defined values of geometrical parameters - case WB2 ($l_o = 0.1$ m)
 Tablica 3. Maksymalne ugięcie i kluczowe odkształcenia dla wybranych wartości parametrów geometrycznych
 - wariant WB2 ($l_o = 0,1$ m)

Calculation method and input data case Wariant obliczeń i danych	l [m]	h [m]	h_o [m]	w [mm]	ε_a [10^{-6}]	ε_p [10^{-6}]
VEROAD	–	–	–	0.241	62.42	-164.49
FEM / MES	8.0	6.0	0.1	0.209	62.31	-164.27
FEM / MES	8.0	7.0	0.1	0.210	62.31	-164.25
FEM / MES	8.0	8.0	0.1	0.211	62.31	-164.24
FEM / MES	8.0	9.0	0.1	0.211	62.31	-164.24
FEM / MES	8.0	10.0	0.1	0.211	62.31	-164.24
FEM / MES	8.0	11.0	0.1	0.211	62.31	-164.24
FEM / MES	8.0	12.0	0.1	0.211	62.31	-164.24
FEM / MES	8.0	6.0	0.2	0.211	62.31	-164.25
FEM / MES	8.0	10.0	0.2	0.212	62.31	-164.23
FEM / MES	12.0	6.0	0.2	0.217	62.35	-164.42
FEM / MES	12.0	10.0	0.2	0.219	62.36	-164.39

Table 4. Maximum deflections and key strains for the pre-defined values of geometrical parameters - case WB2 ($l_o = 0.2$ m)
 Tablica 4. Maksymalne ugięcie i kluczowe odkształcenia dla wybranych wartości parametrów geometrycznych
 - wariant WB2 ($l_o = 0,2$ m)

Calculation method and input data case Wariant obliczeń i danych	l [m]	h [m]	h_o [m]	w [mm]	ε_a [10^{-6}]	ε_p [10^{-6}]
VEROAD	-	-	-	0.241	62.42	-164.49
FEM / MES	8.0	6.0	0.1	0.214	62.33	-164.47
FEM / MES	8.0	6.0	0.2	0.218	62.34	-164.45
FEM / MES	8.0	6.0	0.3	0.220	62.35	-164.44
FEM / MES	8.0	10.0	0.1	0.217	62.34	-164.44
FEM / MES	8.0	10.0	0.2	0.218	62.34	-164.40
FEM / MES	8.0	10.0	0.3	0.218	62.34	-164.40
FEM / MES	12.0	6.0	0.1	0.215	62.38	-164.51
FEM / MES	12.0	6.0	0.2	0.219	62.37	-164.50
FEM / MES	12.0	10.0	0.1	0.221	62.37	-164.51
FEM / MES	12.0	10.0	0.2	0.222	62.36	-164.44

Table 5. Maximum deflections and key strains for pre-defined values of geometrical parameters - case WB2 ($l_o = 0.1$ m)
 Tablica 5. Maksymalne ugięcie i kluczowe odkształcenia dla wybranych wartości parametrów geometrycznych
 - wariant WB2 ($l_o = 0,1$ m)

Calculation method and input data case Wariant obliczeń i danych	l [m]	h [m]	h_o [m]	w [mm]	ε_a [10^{-6}]	ε_p [10^{-6}]
VEROAD	–	–	–	0.241	62.42	-164.49
FEM / MES	64.0	128.0	0.1	0.239	62.38	-164.49

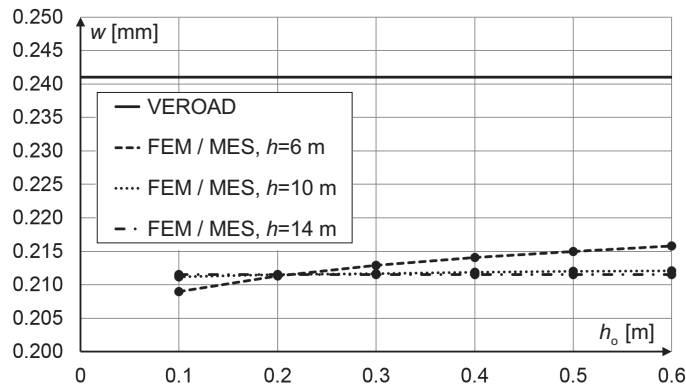


Fig. 12. Maximum deflection as a function of h_0 for various heights of the domain ψ with $l = 8$ m, $l_0 = 0.1$ m

Rys. 12. Maksymalne ugięcie w funkcji wartości h_0 dla różnych wysokości obszaru ψ przy $l = 8$ m, $l_0 = 0,1$ m

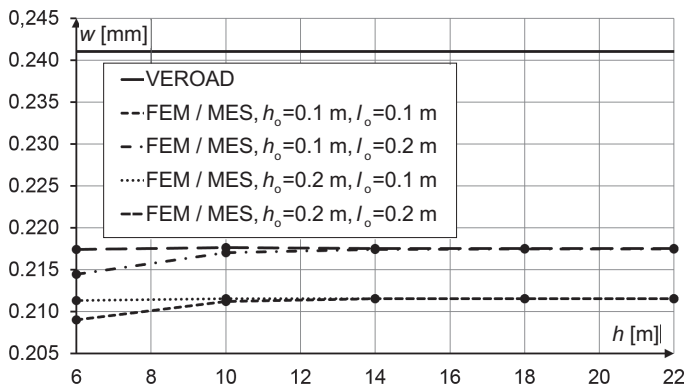


Fig. 14. Maximum deflection as a function of height of domain ψ for $l = 8$ m for different pre-defined values of h_0 and l_0

Rys. 14. Maksymalne ugięcie w funkcji wysokości obszaru ψ dla $l = 8$ m oraz wybranych wartości h_0 i l_0

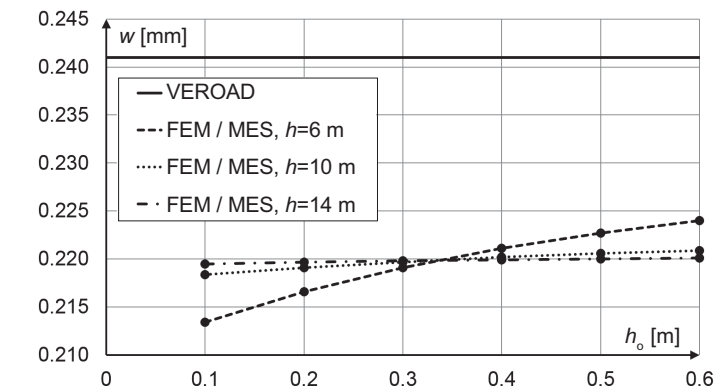
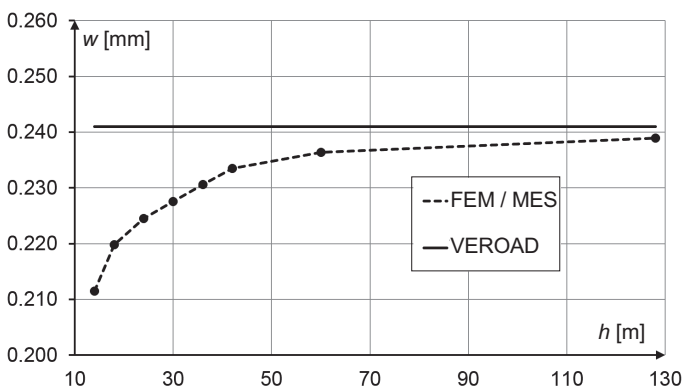


Fig. 13. Maximum deflection as a function of h_0 for various heights of the domain ψ with $l = 12$ m, $l_0 = 0.1$ m

Rys. 13. Maksymalne ugięcie w funkcji wartości h_0 dla różnych wysokości obszaru ψ przy $l = 12$ m, $l_0 = 0,1$ m

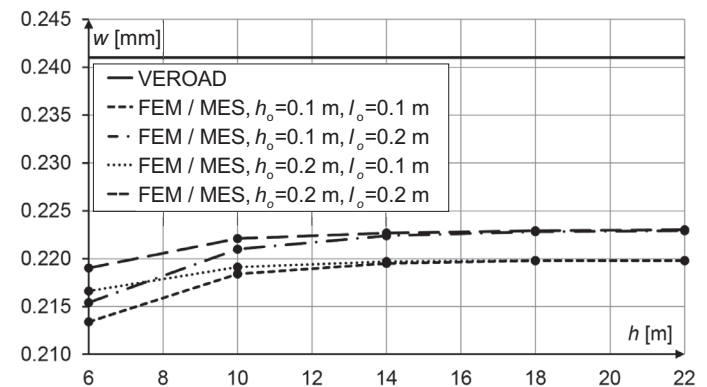


Fig. 15. Maximum deflection as a function of height of domain ψ for $l = 12$ m for different pre-defined values of h_0 and l_0

Rys. 15. Maksymalne ugięcie w funkcji wysokości obszaru ψ dla $l = 12$ m oraz wybranych wartości h_0 i l_0

Fig. 16. Maximum deflection as a function of height of the domain ψ for the domain diameter l at which the further increase of height does not increase the maximum deflection with $h_0 = 0.1$ m and $l_0 = 0.1$ m

Rys. 16. Maksymalne ugięcia w funkcji wysokości obszaru ψ dla średnicy l tego obszaru przyjmującej wartość, przy której dalsze zwiększanie wysokości nie powoduje wzrostu maksymalnego ugięcia przy $h_0 = 0,1$ m i $l_0 = 0,1$ m

5. WNIOSKI

Podsumowując można stwierdzić, że zaprezentowane praktyczne sposoby wyboru skończonego obszaru z półprzestrzeni sprężystej warstwowej wraz z odpowiednimi warunkami

5. CONCLUSIONS

As a final conclusion we can state that the above described practical methods of defining a finite domain in an elastic, multi-layered half space, including definition of

brzegowymi, przydatne do analizy MES nawierzchni drogowej podatnej, poszerzają wiedzę na ten temat oraz przybliżają znane już możliwości doboru wymienionego obszaru, również w dynamice nawierzchni. Tym niemniej, o ile sposób pierwszy prowadzi do ograniczenia niepotrzebnie dużego zwiększania grubości ostatniej warstwy (podłoża gruntowego), to pod tym względem sposób ostatni jest mało praktyczny w zagadnieniach statycznych, a także w zagadnieniach quasi-statycznych, ale może być użyteczny w udarowych zagadnieniach dynamicznych.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Nagórska M.*: On a certain method of selection of domain for finite element modeling of the layered elastic half-space in the static analysis of flexible pavement. Archives of Civil Engineering, **58**, 4, 2012, 477-501
- [2] *Złotowska M.*: Dobór rozmiarów obszaru wielowarstwowej półprzestrzeni sprężystej do modelowania MES w analizie statycznej nawierzchni drogowej podatnej. Autobusy - Eksploatacja i Testy, 12, 2016, 1532-1535
- [3] *Tutka P., Nagórski R.*: Walidacja modeli numerycznych nawierzchni drogowej podatnej z użyciem elementów nieskończonych. Autobusy - Eksploatacja i Testy, 12, 2016, 1400-1404
- [4] *Kim M.*: Three-dimensional finite element analysis of flexible pavements considering nonlinear pavement foundation behavior. PhD dissertation, University of Illinois, Urbana, USA, 2007
- [5] *Nagórski R., Nagórska M.*: Weryfikacja modeli skończenie elementowych w analizie statycznej konstrukcji nawierzchni drogowych podatnych. Prace Naukowe, Budownictwo, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014
- [6] *Nishiyama T., Bhatti M.A., Lee H.D.*: Development of 3-D finite element model to quantify bond level of thin concrete overlay. Transportation Research Board 82nd Annual Meeting, 2003
- [7] *Bandeira A.A., Merighi J.V., Fortes R.M.*: Finite element model to study structural pavements design - investigation in terms of stresses and strains considering elastoplastic frictional contact mechanics technologies. The Fifth International Conference on Maintenance and Rehabilitation of Pavements and Technological Control MAIREPAV5, Park City, Utah, USA, 2007
- [8] *Beer G., Meek J.L.*: 'Infinite domain' elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **17**, 1, 1981, 43-52
- [9] *Elseifi M.A., Al-Qadi I.L., Yoo P.J.*: Viscoelastic modeling and field validation of flexible pavements. Journal of engineering mechanics, **132**, 2, 2006, 172-178
- [10] *Wang H., Al-Qadi I.L.*: Importance of nonlinear anisotropic modeling of granular base for predicting maximum viscoelastic pavement responses under moving vehicular loading. Journal of Engineering Mechanics, **139**, 1, 2012, 29-38
- [11] *Yang Y.B., Hung H.H.*: A 2.5 D finite/infinite element approach for modelling visco-elastic bodies subjected to moving loads. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **51**, 11, 2001, 1317-1336
- [12] *Zbiciak A., Brzeziński K., Michalczyk R.*: Analiza wpływu obciążeń dynamicznych na zachowanie się lepko-sprężystego modelu nawierzchni drogowej. Logistyka, 3, 2014, 7037-7045
- [13] *Wójcik-Grząba I., Kwaśniewski L.*: Verification of the hemispherical finite element model of elastic space. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **14**, 1, 2015, 67-79
- [14] ABAQUS Analysis User's Manual, Ver. 6.8, 2008. Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., USA, 2008
- [15] *Minhoto M., et al.*: Predicting asphalt pavement temperature with a three-dimensional finite element method. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, **1919**, 2005, 96-110
- [16] *Al-Qadi I.L., Elseifi M., Yoo P.J.*: In-situ validation of mechanistic pavement finite element modeling. In: International Conference on Accelerated Pavement Testing, 2nd, 2004, Minneapolis, Minnesota, USA
- [17] *Pirabarooban S., Zaman M., Tarefder R.A.*: Evaluation of rutting potential in asphalt mixes using finite element modeling. In: The Transportation Factor, Annual Conference and Exhibition of the Transportation Association of Canada, Canada, 2003
- [18] *Zbiciak A.*: Constitutive modelling and numerical simulation of dynamic behaviour of asphalt-concrete pavement. Engineering Transactions, **56**, 4, 2008, 311-324
- [19] *Hopman P.C.*: The Visco-Elastic Multilayer Program VEROAD. Heron, **41**, 1, 1996, 71-91

appropriate boundary conditions for the purpose of finite-element analysis of flexible road pavements broaden our knowledge on the subject and give an insight into application of the already known domain definition principles in dynamic problems of pavement analyses. It is worthwhile noting that while the first of the presented methods reduces unreasonably high thickness of the lowermost layer (soil subgrade), the last of them is impractical for solving static (and also quasi-static) problems. Nevertheless, it can be useful in analysing dynamic impact load problems.