RYSZARD J. GRABOWSKI<sup>1)</sup>

## ELLIPSE OFFSET CURVES IN THE FORMATION OF TURBO-ROUNDBABOUTS

## KRZYWE OFFSETOWE ELIPSY W KSZTAŁTOWANIU ROND TURBINOWYCH

**STRESZCZENIE.** W kształtowaniu geometrii tras drogowych wykorzystuje się różne krzywe, a jedno z głównych miejsc w tych zastosowaniach zajmuje łuk kołowy. Wśród innych krzywych można wymienić: kłotoidę, spiralę, elipsę, zbiory krzywych kształtowanych za pomocą funkcji wielomianowych i tym podobne. W praktyce realizacyjnej krzywych w terenie wyznacza się najczęściej oś drogi. Krawędzie zewnętrzne wytycza się odmierzając szerokość jezdni wzdłuż normalnej do tej osi. Powstają w ten sposób dwie krzywe offsetowe, które najczęściej nie są krzywymi tego samego typu. Jeśli oś drogi stanowi łuk kołowy o promieniu  $R$ , to odkładając szerokość jezdni  $s$  wzdłuż promienia okręgu, otrzyma się także łuki kołowe o promieniach  $R-s$  i  $R+s$ , przy założeniu, że  $s$  ma wartość stałą. W kształtowaniu rond turbinowych proponuje się różne krzywe, np. elipsę. W przypadku jej wykorzystania, odkładając szerokość jezdni od jej osi nie otrzyma się krzywych, które spełniają równania elips, lecz krzywe do nich zbliżone. Powstaje pytanie, jak wielkie są to odchylenia? Czy posiadają istotne znaczenie w praktyce realizacyjnej? Rozważania przeprowadzone w artykule udzielają odpowiedzi na te pytania.

**SŁOWA KLUCZOWE:** dokładność tyczenia, elipsa, krzywa offsetowa elipsy, rondo turbinowe.

**ABSTRACT.** Various curves are used for shaping the geometry of roads and a curve applied the most often is the circular arc. Clothoid, spiral, ellipse, sets of curves shaped with polynomial functions and other similar curves are also worth mentioning. The road axis is usually set during practical realization of the curves in the terrain. The external edges are determined by measuring the width of the carriageway along the normal line to this axis. That is how two offset curves, which usually are of different type, are created. If the road axis is a circular arc with a radius  $R$ , then by displacing the width of the carriageway  $s$  along the radius of the circle, the circular arcs with radii  $R-s$  and  $R+s$  are also created, assuming that  $s$  is constant. While shaping turbo-roundabouts different curves are suggested, e.g. an ellipse. In case of its application, by displacing the width of the carriageway from its axis, the curves that fulfill the conditions of ellipses' equations are not created, but only the curves similar to them. The question is how large are the deviations? Are they important in practical realization? The analyses included in this article give answers to these questions.

**KEYWORDS:** accuracy of delineating, ellipse, ellipse offset curve, turbo-roundabout.

DOI: 10.7409/rabdim.015.013

<sup>1)</sup> Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka; r.grabowski@pb.edu.pl

## 1. WPROWADZENIE

W kształtowaniu geometrii dróg kołowych używa się różnych krzywych. Znaczącą pozycję posiada tu łuk kołowy. Wśród innych stosowanych czy też proponowanych krzywych wymienić można: kłotoidę, spiralę, elipsę, rodziny krzywych wyznaczanych za pomocą funkcji wielomianowych i inne. W ciągu ostatnich lat zwraca się szczególną uwagę na kształtowanie skrzyżowań z wykorzystaniem rond turbinowych. Idea kształtowania wyspy centralnej polega na wykorzystaniu dwóch półokręgów przesuniętych o szerokość jezdni. Pojazd wjeżdżający na pas wewnętrzny po przekroczeniu osi automatycznie znajduje się na pasie skrajnym. Opis takich rond i idea ich kształtowania zastała zaprezentowana w pracach np. [1] i [2]. To nowe rozwiązanie posiada znaczącą przewagę nad rozpowszechnionymi w praktyce rondami kołowymi. Dzieje się tak dlatego, że na rondach turbinowych tory pojazdów nie przecinają się, więc dają one większe bezpieczeństwo ruchu na skrzyżowaniu. Pociąga to za sobą większą przepustowość takich rond (nawet do 20%). Z tych względów mogą stanowić one uzupełniającą ofertę do wykorzystania w praktyce. W ostatnim okresie pojawiło się wiele nowych propozycji kształtowania wyspy centralnej ronda turbinowego, a wśród nich propozycja kształtowania wyspy centralnej za pomocą elipsy lub spirali Archimedesesa [3, 4]. Zastosowanie elipsy do kształtowania wyspy centralnej jest szczególnie zalecane przy dużej różnicy natężeń ruchu na dwóch krzyżujących się kierunkach.

W praktyce realizacyjnej krzywych w terenie najczęściej wyznacza się oś drogi. Jej skrajne brzegi tyczy się odkładając szerokość pasa ruchu wzdłuż normalnych do osi jezdni. Okazuje się, że w większości przypadków otrzymane krzywe zewnętrzne względem osi nie są tego samego typu co oś drogi. Jeśli oś drogi jest łukiem kołowym o promieniu  $R$ , to krzywe zewnętrzne otrzymane przez odłożenie szerokości jezdni  $s$  wzdłuż promieni są także łukami kołowymi o promieniach  $R-s$  i  $R+s$ . W kształtowaniu rond turbinowych proponuje się różne krzywe, wśród nich np. elipsę [3]. W przypadku jej wykorzystania, odkładając szerokość jezdni od osi jezdni, nie otrzyma się krzywych, które spełniają równania elips, ale krzywe do nich zbliżone. Powstaje pytanie, jak wielkie są to odchylenia? Czy posiadają istotne znaczenie w praktyce realizacyjnej? Rozważania przeprowadzone w artykule udzielają odpowiedzi na te pytania.

## 1. INTRODUCTION

Different curves are used while shaping geometry of circular roads and among the most important of them is the circular arc. Clothoid, spiral, ellipse, sets of curves shaped with polynomial functions and other similar curves are also often used. In the last years special attention has been paid to shaping intersections with the use of turbo-roundabouts. The idea of central island formation involves the use of two semicircles displaced by the width of the carriageway. The vehicle entering the interior lane, after crossing the axis is automatically located in the outer lane. A description of such roundabouts and the idea of shaping them was presented in the papers, such as [1] and [2]. This new solution has significant advantage over popular circular roundabouts. Mainly because tracks of the vehicles do not intersect at the turbo-roundabouts, so they offer higher traffic safety at the crossroads. This results in higher capacity of such roundabouts (up to 20%). For these reasons, they can constitute a complementary alternative for practical application. In recent years, a number of new proposals of shaping a central island of a turbo roundabout have been introduced, including a proposal to form a central island using an ellipse or the spiral of Archimedes [3, 4]. The use of ellipse in shaping the central island is particularly recommended for roundabouts with high traffic differentiation in the two intersecting directions.

The road axis is usually set during practical realization of the curves in the terrain. Its outer edges are determined by displacing the width of the lane along the normal line to the road axis. It appears that in most cases the obtained curves that are external to the axis are not of the same type as the carriageway axis. If the road axis is a circular arc with a radius  $R$ , the external curves obtained by displacing the width of the carriageway  $s$  along the radii are also the circular arcs of radii  $R-s$  and  $R+s$ . While shaping turbo-roundabouts, different curves are recommended, e.g. ellipse [3]. In case of its application, by displacing the width of the carriageway from its axis the curves that fulfill the conditions of ellipses' equations are not obtained, but only the curves similar to them. The question is how big the deviations are? Are they important in practical realization? The analyses included in this article give answers to these questions.

## 2. RONDA TURBINOWE

Idea stosowania rond turbinowych prezentowana była szczegółowo w fachowej literaturze polskiej [3-6]. Z tych względów w niniejszym opracowaniu problem ich kształtowania zostanie zaprezentowany skrótowo. Idea tworzenia rond turbinowych po raz pierwszy została przedstawiona w Holandii 20 lat temu. Dwa lub więcej koncentrycznych łuków kołowych przesuniętych o szerokość jezdni wzdłuż osi ronda tworzy rondo turbinowe. Przesunięcie to powoduje, że pojazd wjeżdżający na pas wewnętrzny, po przekroczeniu linii zewnętrznej pasa, znajduje się automatycznie na pasie zewnętrznym. Innowacja ta powoduje eliminację manewru przeplatania w obrębie ronda. W literaturze proponuje się kształtowanie rond turbinowych z wykorzystaniem dwóch półokręgów lub czterech ćwiartek okręgów.

Na Rys. 1 przedstawione zostało rondo turbinowe ukształtowane z dwóch półokręgów przesuniętych wzdłuż linii (zbliżonej do dominującego kierunku ruchu) o szerokość jezdni w stosunku do środka tarczy ronda. Taki sposób formowania jest uzasadniony, gdy jeden z kierunków posiada dominujące natężenie ruchu nad drugim. Jeżeli obciążenie wlotów jest równomierne i dominujący kierunek nie występuje, wtedy proponuje się wykorzystać do kształtowania tarczy ronda cztery ćwiartki okręgów przesuniętych w ten sposób, że ich środki tworzą kwadrat. Jeżeli występuje wyraźna dominacja jednego kierunku ruchu nad drugim, wtedy wskazane jest szczególnie zastosowanie elipsy do kształtowania tarczy ronda. Przesunięcie spłaszczonej półelipsy o szerokość jezdni powinno nastąpić wzdłuż linii o dominującym kierunku ruchu (Rys. 2).

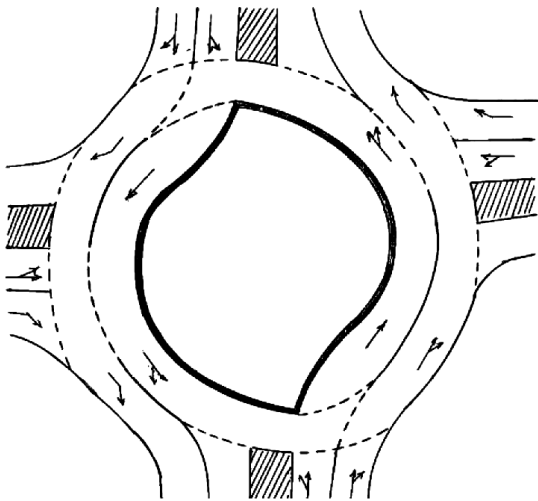


Fig. 1. Draft of a turbo-roundabout formed with two semicircles [7]  
Rys. 1. Szkic ronda turbinowego ukształtowanego z dwóch półokręgów [7]

## 2. TURBO-ROUNDBABOUTS

The idea of application of turbo roundabouts was presented in detail in the professional Polish literature [3-6]. For these reason, the problem of shaping them is presented briefly in this paper. The idea of forming turbo-roundabouts was first introduced in the Netherlands 20 years ago. Two or more concentric arcs displaced by the width of the carriageway along the roundabout axis form a turbo-roundabout. This shift causes that a vehicle entering the interior lane, after crossing the exterior line of the lane is automatically located at the exterior lane. This innovation eliminates the traffic merging within the area of a roundabout. The literature advises to form turbo-roundabouts using two semicircles or four quarter-circles.

Fig. 1 presents turbo-roundabout formed with the use of two semicircles displaced along the line (similar to the dominant traffic direction) by the width of the carriageway in relation to the centre of the circulating lanes. This way of formation is justified when one of the directions has a dominant traffic intensity over the other one. If the load of entrances is even and there is no dominant direction, then it is recommended to form the circulating lanes by using four quarter-circles displaced in such a way that their centres form a square. If one traffic direction is dominant over the other, then it is especially recommended to form the circulating lanes using an ellipse. Displacing the flattened semi-ellipse by the width of the carriageway should be done along the lines of the dominant traffic direction (Fig. 2).

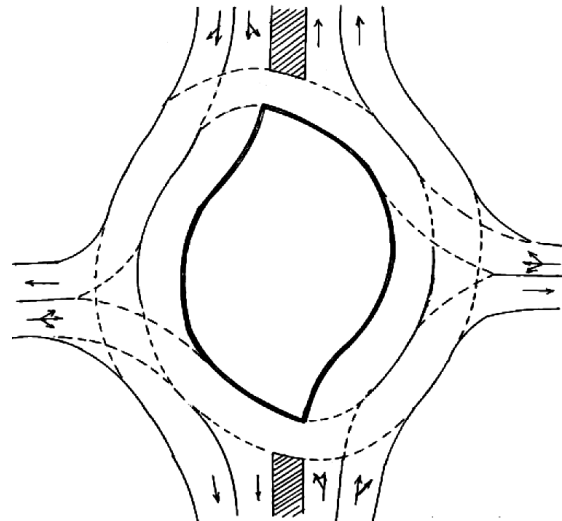


Fig. 2. Draft of a turbo-roundabout formed with an ellipse [4]  
Rys. 2. Szkic ronda turbinowe ukształtowanego za pomocą elipsy [4]

Zastosowanie elipsy umożliwi projektantowi kształtowanie dowolnego jej spłaszczenia poprzez dobór półosi. Istnieje zatem duża elastyczność w kształtowaniu tarczy ronda w zależności od specyfiki danego skrzyżowania. W przypadku trójwlotowych rond o dużej asymetrii intensywności ruchu bardzo użyteczne mogą okazać się ronda turbiniowe kształtowane za pomocą dwóch półelips o różnych spłaszczeniach przesuniętych wzdłuż osi o szerokość jezdnia lub też z wykorzystaniem półokręgu i półelipsy.

### 3. KRZYWE OFFSETOWE ELIPSY

Równanie elipsy w prostokątnym układzie współrzędnych posiada postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

lub postać parametryczną:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \quad (2)$$

gdzie  $t \in <0, 2\pi>$ .

Współczynnik kierunkowy stycznej do elipsy w dowolnym jej punkcie wynosi  $y' = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x}{y} = \operatorname{tg}\alpha = m$ , zaś w postaci parametrycznej  $y'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}$ .

Równanie stycznej do elipsy w punkcie  $P = (x_0, y_0)$  posiada postać:

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0}{y_0} (x - x_0) + y_0 = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0}{y_0} x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0^2}{y_0} + y_0 = m_P x + k_P, \quad (3)$$

gdzie  $m_P = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0}{y_0}$  i  $k_P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0^2}{y_0}$ . Jeżeli  $t_0$  oznacza parametr odpowiadający punktowi  $P$ , wtedy  $m_P = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}_0$  i  $k_P = b \cos t_0 \operatorname{ctgt}_0$ . Równanie normalnej do elipsy w punkcie  $P$  posiada postać:

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0} (x - x_0) + y_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0} x + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_0 = m_N x + k_N, \quad (4)$$

gdzie:  $m_P = m_N = -1$ ,  $m_N = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0}$ ,  $k_N = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_0$

lub  $m_N = \frac{a}{b} \operatorname{tgt}_0$ ,  $k_N = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) b \sin t_0$ .

The use of an ellipse allows a designer to shape any flattening by selecting a semi-axis. Therefore, there is high flexibility in shaping the circulating lanes, depending on the specific features of the given intersection. Turbo-roundabouts, shaped with the use of two semi-ellipses with different flattening displaced along the axis by the width of the carriageway or by using semicircle and semi-ellipse, can be very useful in case of roundabouts with three entrances and high asymmetry of traffic intensity.

### 3. ELLIPSE OFFSET CURVES

The ellipse equation in Cartesian coordinate system is as follows:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

or is a parametric equation:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \quad (2)$$

where  $t \in <0, 2\pi>$ .

The slope of the tangent to the ellipse at any of its points equals  $y' = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x}{y} = \operatorname{tg}\alpha = m$ , and  $y'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}$  in the parametric form.

The equation of the tangent to the ellipse at the point  $P = (x_0, y_0)$  is expressed in the following formula:

where  $m_P = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0}{y_0}$  and  $k_P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0^2}{y_0}$ . If  $t_0$  designates a parameter corresponding to the point  $P$ , then  $m_P = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}_0$  and  $k_P = b \cos t_0 \operatorname{ctgt}_0$ . The equation of the normal line to the ellipse at a point  $P$  is as follows:

where:  $m_P = m_N = -1$ ,  $m_N = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0}$ ,  $k_N = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_0$

or  $m_N = \frac{a}{b} \operatorname{tgt}_0$ ,  $k_N = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) b \sin t_0$ .

Współrzędne punktów  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$  i  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$ , leżące na normalnej do elipsy w punkcie  $P$  i odległe od niej o długość  $s$  (szerokość jezdni) (Rys. 1), wyznacza się poprzez rozwiązanie układu równań:

$$y = m_N x + k_N, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = s^2 \quad (5)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$(1 + m_N^2)x^2 + 2[m_N(k_N - y_0) - x_0]x + (k_N - y_0)^2 + x_0^2 - s^2 = 0$$

lub

$$\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{y_0^2}{x_0^2}\right]x^2 - 2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{y_0^2}{x_0} + x_0\right]x + \left(\frac{a}{b}\right)^4 y_0^2 + x_0^2 - s^2 = 0.$$

Wyróżnik kwadratowy wynosi  $\Delta = 4s^2\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2\right] = 4s^2(1 + m_N^2)$ , więc rozwiązanie wyżej podanych równań kwadratowych dostarcza dwóch pierwiastków:

$$x_{P_1} = x_0 + \frac{x_0 s}{a^2 \sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}} = x_0 + \frac{s}{\sqrt{1+v}}, \quad (6)$$

$$x_{P_2} = x_0 - \frac{x_0 s}{a^2 \sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}} = x_0 - \frac{s}{\sqrt{1+v}}, \quad (7)$$

gdzie:  $v = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \left(\frac{y_0^2}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 tg^2 t_0$ . Podstawiając wyżej

obliczone współrzędne do pierwszego z równań w (5) otrzymuje się współrzędne  $y$  punktów  $P_1$  i  $P_2$ :

$$y_{P_1} = y_0 + \sqrt{\frac{v}{1+v}}s, \quad (8)$$

$$y_{P_2} = y_0 - \sqrt{\frac{v}{1+v}}s. \quad (9)$$

Elipsa o półosiach  $a+s$  i  $b+s$  posiada równanie:

$$\frac{x^2}{(a+s)^2} + \frac{y^2}{(b+s)^2} = 1. \quad (10)$$

Współrzędne przecięcia normalnej do elipsy w punkcie  $P = (x_0, y_0)$  z elipsą przedstawioną wyżej otrzymuje się poprzez rozwiązanie układu równań:

The coordinates of points  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$  and  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$  lying on the normal line to the ellipse at point  $P$  and distant from it by the length  $s$  (the width of carriageway) (Fig. 1), are determined by solving the system of equations:

After transformations the following formula is obtained:

or

The quadratic discriminant equals  $\Delta = 4s^2\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2\right] = 4s^2(1 + m_N^2)$ , so the solution of the above mentioned quadratic equations gives two roots:

where:  $v = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \left(\frac{y_0^2}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 tg^2 t_0$ . By substituting the

above calculated coordinates to the first of the equations in (5)  $y$ -coordinates of the point  $P_1$  and  $P_2$  are obtained:

The ellipse with semi-axes  $a+s$  and  $b+s$  has the following equation:

The coordinates of the intersection of the normal line with the ellipse at the point  $P = (x_0, y_0)$  with an ellipse shown above are obtained by solving the systems of equations:

$$y = m_N x + k_N, \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{(a+s)^2} + \frac{y^2}{(b+s)^2} = 1. \quad (12)$$

Podstawiając  $y = m_N x + k_N$  do równania (12) otrzymuje się równanie kwadratowe:

$$\left[ \frac{1}{(a+s)^2} + \frac{m_N^2}{(b+s)^2} \right] x^2 + \frac{2m_N k_N}{(b+s)^2} + \frac{k_N^2}{(b+s)^2} = 1 = 0$$

Wyróżnik powyższego równania kwadratowego posiada postać:

$$\Delta = \frac{4}{(a+s)^2 (b+s)^2} [(a+s)^2 m_N^2 - k_N^2 + (b+s)^2].$$

Współrzędne punktu przecięcia się elipsy (10) z normalną do elipsy w punkcie  $P$  wyniosą:

$$x_{Q_1} = \frac{\frac{b+s}{a+s} \sqrt{(a+s)^2 m_N^2 - k_N^2 + (b+s)^2} - m_N k_N}{\left( \frac{b+s}{a+s} \right)^2 + m_N^2}. \quad (13)$$

Drugą współzrędną wyznacza się ze wzoru:

$$y_{Q_1} = m_N \cdot x_{Q_1} + k_N. \quad (14)$$

Wyznaczona odległość punktów  $P_1$  i  $Q_1$  pozwala stwierdzić, że nowa elipsa o półosiach  $a+s$  i  $b+s$  nie zachowuje stałej odległości  $s$  względem elipsy wyjściowej o półosiach  $a$  i  $b$  w punktach nie leżących na osiach układu współrzędnych:

$$d_{P_1 Q_1} = \sqrt{(x_{Q_1} - x_{P_1})^2 + (y_{Q_1} - y_{P_1})^2}. \quad (15)$$

Podobnie można określić współrzędne punktu  $Q_2$  powstałego z przecięcia normalnej do elipsy bazowej w punkcie  $P$  (o półosiach  $a$  i  $b$ ) z elipsą o półosiach  $a-s$  i  $b-s$ , rozwiązując układ równań:

$$y = m_N x + k_N, \quad (16)$$

$$\frac{x^2}{(a-s)^2} + \frac{y^2}{(b-s)^2} = 1, \quad (17)$$

Przeprowadzając rozważania analogiczne do powyższych otrzymuje się:

$$x_{Q_2} = \frac{\frac{b-s}{a-s} \sqrt{(a-s)^2 m_N^2 - k_N^2 + (b-s)^2} - m_N k_N}{\left( \frac{b-s}{a-s} \right)^2 + m_N^2}, \quad (18)$$

$$y_{Q_2} = m_N \cdot x_{Q_2} + k_N. \quad (19)$$

By substituting  $y = m_N x + k_N$  to the equation (12) the quadratic equation is obtained:

The discriminant of the above quadratic equation is as follows:

The coordinates of the intersection of the ellipse (10) with the normal line to the ellipse at a point  $P$  will be equal to:

The second coordinate is determined from the formula:

The designated distance of the points  $P_1$  and  $Q_1$  shows that the new ellipse with the semi-axes  $a+s$  and  $b+s$  does not keep a constant distance  $s$  regarding the base ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$ , at points not lying on the axes of the coordinate system:

Similarly, the coordinates of the point  $Q_2$ , resulting from the intersection of the normal line with the base ellipse at the point  $P$  (with semi-axes  $a$  and  $b$ ) with ellipse with semi-axes  $a-s$  and  $b-s$ , can be determined by solving the following system of equations:

By conducting the analyses similar to the above mentioned, the following formulae are obtained:



## 4. ROZWAŻANIA PRAKTYCZNE

Niech wyspa środkową kształtowana za pomocą elipsy dla ronda średniego poza terenem zabudowy będzie miała półosie  $a = 23$  m i  $b = 17$  m oraz mimośród

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0,67356. \text{ Równanie ka-}$$

noniczne elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{23^2} + \frac{y^2}{17^2} = 1.$$

lub postać parametryczną:

$$x = 23 \cos t, \quad y = 17 \sin t.$$

Przyjmując parametr  $t = \frac{\pi}{4}$  otrzymany zgodnie z powyższymi wzorami, współrzędne punktu  $P = (x_0, y_0) = (16,26346; 12,02062)$ . Niech szerokość jezdni wynosi  $s = 3,5$  m (ma tu ona znaczenie przykładowe), gdyż w praktyce będzie większa (w Tabl. 1 uwzględniono także wartość  $s = 7$  m). Współrzędne punktów  $P_1$  i  $P_2$ , odległych od punktu  $P$  o  $3,5$  m (Rys. 3) i leżących na normalnej do elipsy, otrzyma się ze wzorów (6-9)  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}) = (18,34383; 14,83543)$ ,  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}) = (14,18309; 9,20620)$ .

Współrzędne punktu  $Q_1$  przecięcia normalnej do elipsy w punkcie  $P$  z elipsą o półosiach  $a + s = 26,5$  m i  $b + s = 20,5$  m ( $e = 0,63369$ ) opisanej równaniem  $\frac{x^2}{(23+3,50)^2} + \frac{y^2}{(17+3,50)^2} = 1$ , zgodnie z wzorami (13) i (14), wyniosą  $Q_1 = (18,32434; 14,80904)$ . Wykorzystując wzór (15) otrzymuje się odległość punktów  $P_1$  i  $Q_1$ ,  $d_{P_1Q_1} = 32,8$  mm.

Analogicznie, współrzędne punktu  $Q_2$  przecięcia się normalnej do elipsy bazowej w punkcie  $P$  z elipsą o półosiach  $a - s = 19,5$  m i  $b - s = 13,5$  m ( $e = 0,72160$ ) o równaniu  $\frac{x^2}{(23-3,50)^2} + \frac{y^2}{(17-3,50)^2} = \frac{x^2}{702,25} + \frac{y^2}{420,25} = 1$ , zgodnie z wzorami (18) i (19), wyniosą  $Q_2 = (14,32434; 9,24416)$  więc  $d_{P_2Q_2} = 47,2$  mm. Analogiczne obliczenia odległości krzywych offsetowych względem elipsy bazowej (o półosiach  $a = 23$  m i  $b = 17$  m) dla różnych wartości parametru  $t$  zostały przedstawione w Tabl. 1. W przypadku wzrostu mimośrodu elipsy wielkości odstępów krzywych offsetowych elipsy od elipsy bazowej będą wzrastały w stosunku do podanych w Tabl. 1.

## 4. PRACTICAL ANALYSES

The following central island shaped with the use of an ellipse, for a medium roundabout located in the non-built-up area, will be considered: the semi-axe  $a = 23$  m and

$$b = 17 \text{ m and the eccentric } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$= 0.67356$ . The canonical ellipse equation is as follows:

or is a parametric equation:

$$(19)$$

Assuming that the parameter  $t = \frac{\pi}{4}$  was obtained according to the above formulae, the coordinates of the point  $P = (x_0, y_0) = (16.26346; 12.02062)$ . If the carriageway width is set at  $s = 3.5$  m (here it has an exemplary significance), in practice it will be greater (Table 1 also includes the value of  $s = 7$  m). The coordinates of the points  $P_1$  and  $P_2$  distant from the point  $P$  by  $3.5$  m (Fig. 3) and lying on the normal line to ellipse will be obtained from the formulae (6-9)  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}) = (18.34383; 14.83543)$ ,  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}) = (14.18309; 9.20620)$ .

The coordinates of the point  $Q_1$  of the intersection of the normal line with the ellipse at a point  $P$  with the ellipse with semi-axes  $a + s = 26.5$  m and  $b + s = 20.5$  m ( $e = 0.63369$ ) defined by the equation  $\frac{x^2}{(23+3.50)^2} + \frac{y^2}{(17+3.50)^2} = 1$ , in accordance with the formulae (13) and (14), will be equal to  $Q_1 = (18.32434; 14.80904)$ . By using the equation (15) the distance of points  $P_1$  and  $Q_1$ ,  $d_{P_1Q_1} = 32.8$  mm is obtained.

By analogy, the coordinates of the point  $Q_2$  of the intersection of the normal line with the base ellipse at the point  $P$  with the ellipse with semi-axes  $a - s = 19.5$  m and  $b - s = 13.5$  m ( $e = 0.72160$ ) with the equation  $\frac{x^2}{(23-3.50)^2} + \frac{y^2}{(17-3.50)^2} = \frac{x^2}{702.25} + \frac{y^2}{420.25} = 1$ , according to the formulae (18) and (19),  $Q_2 = (14.32434; 9.24416)$  will be equal  $d_{P_2Q_2} = 47.2$  mm. Similar calculations of the offset curves distances regarding the base ellipse (with semi-axes  $a = 23$  m and  $b = 17$  m) for different values of

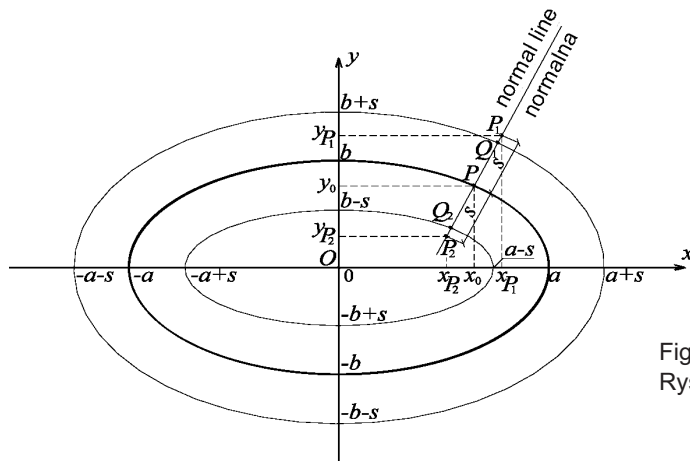


Fig. 3. Ellipse offset curves  
Rys. 3. Krzywe offsetowe elipsy

parameter  $t$  are presented in Table 1. In case of the increase of the ellipse eccentric, the size of the distances between the ellipse offset curve and the base ellipse will increase in the relation to the ones specified in the Table 1.

Table 1. Distances of ellipse offset curves with semi-axes  $a = 23$  m and  $b = 17$  m in relation to ellipses with semi-axes:  $a = 23+3.5 = 26.5$  m,  $b = 17+3.5 = 20.5$  m and  $a = 23-3.5 = 19.5$  m,  $b = 17-3.5 = 13.5$  m  
Tablica 1. Odległości krzywych offsetowych elipsy o półosiach  $a = 23$  m i  $b = 17$  m względem elips o półosiach  $a = 23+3,5 = 26,5$  m;  $b = 17+3,5 = 20,5$  m i  $a = 23-3,5 = 19,5$  m;  $b = 17-3,5 = 13,5$  m

Parameter / Parametr $t$	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
Corresponding polar angle of the point with parameter $t$ Odpowiadający kąt biegunowy punktu o parametrze $t$	0	17°01'	36°28'	60°44'	90°
$d_{P_1Q_1}$ (for / dla $s = 7$ m) [mm]	0	21.1	32.8 (57.0)	13.4	0
$d_{P_2Q_2}$ (for / dla $s = 7$ m) [mm]	0	28.6	47.2 (120.7)	19.7	0

## 5. DISKUSJA I WNIOSKI

Odkładając stałą wartość  $s$  (szerokość pasa ruchu) wzdłuż normalnej w dowolnym punkcie wyznaczonej krzywej, nie zawsze otrzymuje się krzywą tego samego typu. W przypadku łuku kołowego o promieniu  $R$ , jak to już zostało zasygnalizowane na wstępie, odkładanie stałej odległości  $s$  wzdłuż jego promienia wyznacza także łuki kołowe o promieniach  $R - s$  i  $R + s$ . W przypadku krzywej bazowej w postaci elipsy odłożenie stałej długości  $s$  wzdłuż normalnych w jej dowolnych punktach wyznacza krzywe (krzywe offsetowe elipsy), które nie spełniają równań elips. Teoretyczne i praktyczne badania przedstawione w tym artykule (dla elipsy o półosiach  $a = 23$  m i  $b = 17$  m) pokazują, że krzywe offsetowe elipsy ( $s = 3,5$  m) w stosunku do elips o półosiach  $a = 26,5$  m i  $b = 20,5$  m oraz  $a = 19,5$  m i  $b = 13,5$  m mogą osiągać odstępów około 5 cm. Jeżeli zamiast osi drogi wyznaczona zostanie najpierw tarcza wewnętrzna ronda, to krawędź zewnętrzna wymaga odłożenia długości

## 5. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

By displacing a constant value  $s$  (the width of a lane) along the normal line at any point on the determined curve, a curve of the same type is not always obtained. In case of the circular arc of radius  $R$ , as it has already been indicated in the introduction, displacing a constant distance  $s$  along its radius also determines the circular arcs with radii  $R - s$  and  $R + s$ . In case of a base curve in the form of an ellipse, displacing a constant distance  $s$  along the normal line at any of its points defines curves (ellipse offset curves), which do not fulfill the conditions of ellipses' equations. Theoretically and practically, the research presented in this article (for an ellipse with semi-axes  $a = 23$  m and  $b = 17$  m) shows that the ellipse offset curves ( $s = 3.5$  m) in relation to ellipses with semi-axes  $a = 26.5$  m and  $b = 20.5$  m, and  $a = 19.5$  m and  $b = 13.5$  m can reach distances of about 5 cm. If the circulating lanes of a roundabout are determined first instead of the road axis, then the



$2s = 7$  m. Wtedy maksymalne odchylenie krzywej offsetowej elipsy od elipsy wynosić będzie około 12 cm. Należy zaznaczyć, że dokładność wyznaczenia krzywych w terenie przy użyciu nowoczesnych teodolitów elektronicznych osiąga  $\pm 1$  cm. Wielkości w Tabl. 1 przekraczają dokładność tyczenia krzywych.

Projektant musi podjąć zatem decyzję, czy przyjmuje wyznaczenie krawędzi zewnętrznych ronda jako elipsy o półosiach  $(a - s, b - s)$  i  $(a + s, b + s)$  w stosunku do elipsy bazowej o półosiach  $a$  i  $b$ , biorąc pod uwagę fakt, że nastąpi zwężenie szerokości pasa ruchu względem krzywych offsetowych elipsy. W celu uzyskania równania elips krawędzi zewnętrznych można zaprojektować je jako równania elips o półosiach  $(a - s - p, b - s - p)$  i  $(a + s + p, b + s + p)$ , gdzie  $p$  jest poprawką zmniejszającą odchylenia krzywej offsetowej od podanych równań elips (np.  $p$  stanowi połowę maksymalnego odchylenia uzyskanego dla półosi  $a$  i  $b$  rozważanych w przykładzie). Teoretyczne i empiryczne badania przeprowadzone wyżej dają orientację jakiej wielkości odchyień należy oczekiwać. W praktyce najczęściej w pierwszej kolejności tyczy się oś pasa ruchu, wzdłuż którego montuje się ułożenie separatora, a następnie wyznacza się krawędzie zewnętrzne jako krzywe offsetowych elipsy. Projektant może także podjąć decyzję wyznaczenia najpierw tarczy wewnętrznej ronda jako przesuniętych półelips i następnie, odkładając po normalnej szerokość  $2s$ , wyznaczyć krawędź zewnętrzną pasa ruchu. Każde z tych podejść wyznaczenia ronda pociąga za sobą różne konsekwencje w zakresie odchyień krzywych offsetowych od równania elipsy. W świetle powyższych rozważań rozpoczęcie tyczenia ronda od wyznaczenia osi pasa ruchu należy uznać za bardziej celowe.

Warto zaznaczyć, że w rozważaniach empirycznych przyjęto minimalną szerokość jezdni (Tabl. 1). Wielkość ta w praktyce będzie większa (np.  $s = 7,5-8$  m), dlatego odstęp elipsy od jej krzywych offsetowych będą większe niż podano w Tabl. 1. Przy większym mimośrodku elipsy niż prezentowany w przykładzie odstęp te także będą większe. Zastosowanie półelips o różnych spłaszczeniach przesuniętych wzdłuż osi o szerokość jezdni jest szczególnie wskazane w kształtowaniu ronda turbinowego o trzech wlotach o dużej asymetrii intensywności ruchu.

Przeprowadzając podobne rozważania można uzyskać pełen obraz odległości krzywych offsetowych od elips o różnych mimośrodkach, najczęściej proponowanych w kształtowaniu rond turbinowych. Zestaw ten byłby użyteczny w projektowaniu takich skrzyżowań. Należy zaznaczyć, że ronda turbinowe pomimo krótkiej historii ich rozwoju znalazły już zastosowanie praktyczne w Polsce przy

external edge requires displacing the length of  $2s = 7$  m. In this case the maximum deviation of the ellipse offset curve from the ellipse will be about 12 cm. It should be noted that the precision of delineating the curves in the terrain by using modern electronic theodolites is as accurate as  $\pm 1$  cm. The values in Table 1 exceed the accuracy of delineating the curves.

The designer must decide whether to accept determining the external edges of a roundabout as an ellipse with semi-axes  $(a - s, b - s)$  and  $(a + s, b + s)$  in relation to a base ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$ , taking into consideration that there will be narrowing in the width of the lane regarding the ellipse offset curves. In order to obtain the equation of ellipses of external edges they can be designed as equations of ellipses with semi-axes  $(a - s - p, b - s - p)$  and  $(a + s + p, b + s + p)$ , where  $p$  is a correction reducing the deviation of the offset curve from the given ellipses' equations (e.g.  $p$  constitutes a half of the maximum deviation obtained for the semi-axes  $a$  and  $b$  considered in the example). The theoretical and empirical studies described above provide the approximate expected deviations. In practice, first the axis of the lane is determined. Along the latter the arrangement of the separator is set, and then the external edges are determined as ellipse offset curves. The designer may also decide to first determine the circulating lanes of the roundabout as displaced semi-ellipses, and then determine the external edge of the lane by displacing along the normal line the width of  $2s$ . Each of these approaches of roundabout formation carries with it different consequences related to the deviation of ellipse offset curves from the ellipse equation. In light of the above solutions, starting to delineate a roundabout from determining the axis of the lane has to be considered as more appropriate.

It is worth noting that in the empirical analyses a minimal width of the carriageway was assumed (Table 1). In practice, this value will be greater (e.g.  $s = 7.5-8$  m), and thus the distances of the ellipse from its offset curves will be greater than provided in the Table 1. With a bigger eccentric of an ellipse than the one presented in the example, the distances are also greater. The application of semi-ellipses with different flattening displaced along the axis with the width of the carriageway is particularly recommended while shaping a turbo-roundabout with three entrances and high asymmetry of traffic intensity.

While conducting similar analyses one can get a full picture of the distance of offset curves from the ellipses with various eccentricities, the most often proposed in shaping turbo-roundabouts. This set would be useful in designing

kształtowaniu skrzyżowań. W pewnych warunkach mogą one zatem stanowić alternatywę względem rond o kołowej wyspie centralnej. Daje to projektantowi szerszy zakres możliwości i wariantów projektowych, czyniąc pracę bardziej inspirującą i twórczą. W niniejszym artykule postawiono za cel wykazanie istoty problemu krzywych offsetowych elipsy w kształtowaniu ronda. Pominięto natomiast analizę strony ruchowej. Szczególnie wskazane byłoby zatem zbadanie zachowania się na rondzie długich pojazdów sztywnych, np. wyznaczenie torów skrajnych obrysów takich pojazdów na rondzie. Problem ten posiada wiele aspektów badawczych, którym należy poświęcić więcej uwagi w następnych pracach.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Engelsman J.C., Uken M.*: Turbo roundabouts as an alternative to two lane roundabout. Proceedings of the 26<sup>th</sup> Southern African Transport Conference SATC, Pretoria, South Africa, 2007
- [2] *Fortuijn L.G.H.*: Pedestrian and bicycle-friendly roundabouts. Dilemma of comfort and safety. Annual Meeting of the Institute of Transportation Engineers (ITE), Seattle, Washington, USA, 2003
- [3] *Grabowski R.J.*: Kształtowanie rond turbinowych za pomocą elipsy. *Drogownictwo*, **LXIII**, 10, 2008, 339-342
- [4] *Grabowski R.J.*: Turbo-roundabouts as an alternative to standard roundabouts with the circular centre island. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **11**, 3, 2012, 215-231
- [5] *Grabowski R.J.*: Geometrical shaping of the turbo-circuits. *Reports on Geodesy*, **87**, 2, 2009, 137-144
- [6] *Mieszkowski P.*: Ronda turbinowe. *Drogownictwo*, **LXII**, 4, 2007, 129-131
- [7] *Żurowska J.*: Projektowanie rond – doświadczenia i nowe tendencje. Zeszyty N-T Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji w Krakowie. Materiały konferencyjne, **151**, 92, 2010

such intersections. It should be noted that despite short history of turbo-roundabouts, they have already been successfully applied in shaping intersections in Poland. Therefore, under certain conditions turbo-roundabouts may constitute the alternative to roundabouts with a circular central island. This gives the designer a wider range of possibilities and design options, making his work more inspiring and creative. The aim of this article was to demonstrate the nature of the problem of ellipse offset curves in shaping a roundabout. However, the analysis of traffic was skipped. Therefore, it is particularly advisable to investigate the behavior of long rigid vehicles in the area of roundabout, e.g. determining the outlines of outer lanes of such vehicles at the roundabout. This problem has many research aspects which should carefully analysed in subsequent papers.