



MONIKA PODWÓRNA¹⁾
MARIAN KLASZTORNY²⁾

WPŁYW CECH POJAZDÓW SZYNOWYCH NA ODPOWIEŹ DYNAMICZNĄ MOSTU BELKOWEGO

STRESZCZENIE. Celem pracy jest ocena wpływu podstawowych cech pojazdów szynowych na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego w szerokim zakresie prędkości ruchomego obciążenia cyklicznego. Rozważano następujące cechy: masy nieresorowane (zestawy kołowe), masy resorowane (ramy wózków, nadwozia). Badania numeryczne przeprowadzono na uproszczonych modelach mostu i pojazdów szynowych. Modelem mostu belkowego jest swobodnie podparta belka Eulera-Bernoulli'ego. Analizowano cztery modele obciążenia ruchomego o strukturze cyklicznej: układ skupionych sił ruchomych (model P), układ ruchomych mas nieresorowanych (model M), układ ruchomych oscylatorów lepkosprężystych jednomasowych (model M_0), układ ruchomych oscylatorów lepkosprężystych dwumasowych (model MM_0). Ciągi elementów ruchomych są skończone. Do sformułowania macierzowych równań ruchu układu zastosowano metodę Lagrange'a - Ritza oraz metodę Klasztornego. W przypadku modeli M, MM_0 uwzględniono podatność zestawów kołowych oraz więzy jednostronne między obciążeniem ruchomym a torem. Na podstawie badań numerycznych stwierdzono, że w modelowaniu pociągów szybkobieżnych należy uwzględniać masy nieresorowane, zawieszania lepkosprężyste oraz masy resorowane.

SŁOWA KLUCZOWE: modelowanie obciążenia ruchomego, most belkowy, most kolejowy, pociąg szybkobieżny

1. WSTĘP

W dynamice mostów kolejowych poddanych działaniu pociągów szybkobieżnych niektórzy badacze przyjmują uproszczone modele pociągu, w postaci sił, mas skupionych lub rozłożonych, a także oscylatorów jedno- lub dwumasowych, bez oceny zgodności

¹⁾ dr inż. – Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej

²⁾ prof. dr hab. inż. – Wydział Mechaniczny Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie

tych modeli z rzeczywistym oddziaływaniem pojazdów szynowych na tor, m.in. [1 - 11]. Nelson i Conover [1] oraz Benedetti [2] rozpatrywali ciąg ruchomych mas skupionych, Chu i in. [3] analizowali ciąg oscylatorów ruchomych, Langer i Klasztorny [4] rozpatrywali ciąg ruchomych mas rozłożonych. Borowicz [5] badał ciągi ruchomych sił i oscylatorów, Klasztorny [6] rozpatrywał ciągi ruchomych oscylatorów jedno- lub dwumasowych, Klasztorny i Langer [7] analizowali ciągi ruchomych sił skupionych, mas skupionych i oscylatorów jedno- lub dwumasowych. Yang i in. [8] przyjęli ciąg ruchomych mas skupionych, Cheng i in. [9] analizowali ciąg ruchomych dwumasowych oscylatorów, Fryba [10] oraz Yau i in. [11] przyjęli ciąg sił ruchomych. Wyżej wymienione prace opracowano przy założeniu dwustronnych więzów między elementami ruchomymi a belką modelującą most, co nie jest zgodne z rzeczywistością.

Obszerne badania dynamiki belki mostowej dla różnych typów modeli obciążenia ruchomego przedstawiono w pracy [7]. Autorzy [7] opracowali algorytmy numerycznego wyznaczania drgań niestabilnych i ustalonych dla nieskończonego ciągu elementów ruchomych, bazujące na metodzie Lagrange'a-Ritza i równaniach ruchu w jawnej postaci. W przypadku zestawów ruchomych mas skupionych lub oscylatorów lepkosprężystych takie podejście prowadzi do wielokrotnie dłuższego czasu obliczeń niż algorytmy niejawne zastosowane w niniejszej pracy. Ponadto, w pracy [7] przedstawiono wyniki symulacji w bazie parametrów bezwymiarowych, co utrudnia odniesienie tych rozwiązań do układów rzeczywistych. Wpływ modeli obciążenia ruchomego na odpowiedź dynamiczną belki mostowej badano tylko dla wybranych prędkości obciążenia.

Celem niniejszej pracy jest ocena wpływu podstawowych cech pojazdów szynowych na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego w szerokim zakresie prędkości ruchomego obciążenia cyklicznego w postaci skończonego ciągu skupionych elementów ruchomych. Rozważano następujące cechy: masy nieresorowane (zestawy kołowe), masy resorowane (ramy wózków, nadwozia). Badania numeryczne przeprowadzono na uproszczonych modelach mostu i pojazdów szynowych.

W pracy nie proponuje się modeli pociągów szybkobieżnych i mostów do obliczeń inżynierskich. Zaawansowane modele pojazdów szynowych opracowali m.in. Matsuura [12] (płaski model pojazdu szynowego na dwuosiowych wózkach jezdnych, o 6 stopniach swobody) i Klasztorny [13] (przestrzenny model pojazdu na dwuosiowych wózkach jezdnych, o 23 stopniach swobody).

Jednym z nowych elementów niniejszej pracy jest uwzględnienie podatności zestawów kołowych modelowanej przez nieważkie więzy sprężyste pionowe jednostronne. W niektórych pracach z dynamiki kolejowych obciążeń ruchomych podatność ta jest uwzględniana, jednak więzy sprężyste są dwustronne oraz stosowane są inne algorytmy obliczeniowe, np. [14].

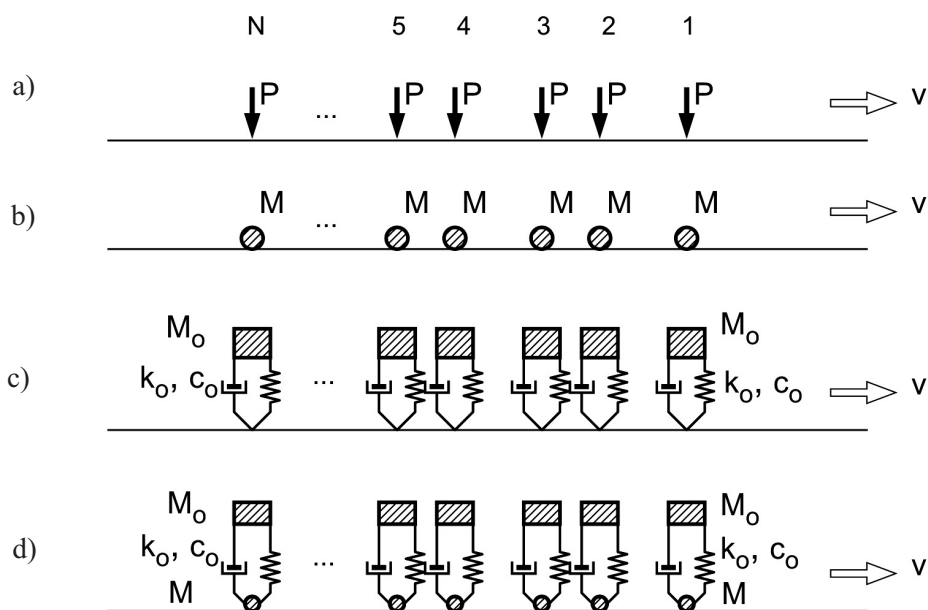
2. UPROSZCZONY MODEL UKŁADU I ZAŁOŻENIA

Modelem układu most – tor – pociąg szybkobieżny jest swobodnie podparta belka Eulera - Bernoulli'ego poddana działaniu skończonego ruchomego obciążenia o strukturze

cyklicznej. W celu zbadania wpływu podstawowych cech pojazdów szynowych rozważono cztery modele obciążenia ruchomego:

- 1) układ ruchomych sił skupionych (model P),
- 2) układ ruchomych mas skupionych (model M),
- 3) układ ruchomych oscylatorów lepkosprężystych jednomasowych (model M_o),
- 4) układ ruchomych oscylatorów lepkosprężystych dwumasowych (model MM_o).

Belka Eulera - Bernoulli'ego jest uproszczonym modelem belkowego mostu kolejowego jednoprzęsłowego. Modele obciążenia ruchomego pokazano na rys. 1. Obciążenie cykliczne składa się z powtarzalnych zestawów dwóch elementów skupionych. Każdy element modeluje jeden dwuosiowy wózek jeczny.



Rys. 1. Modele P, M, M_o , MM_o obciążenia ruchomego
 Fig. 1. The P, M, M_o , MM_o moving load models

Model MM_o obciążenia ruchomego uwzględnia masy nieresorowane i resorowane, dlatego jest modelem odniesienia w badaniach numerycznych wpływu tych mas na odpowiedź dynamiczną belki.

Przyjęto następujące założenia w zakresie uproszczonego modelowania układu most – tor – pociąg szybkojezdny, skorelowane z celem pracy:

- 1) układ belka – obciążenie ruchome jest przedziałami (ze względu na więzy jednostronne) liniowy fizycznie i geometrycznie,

- 2) belka jest pryzmatyczna, inercyjna, odkształcalna giętnie, wykonana z materiału liniowo lepkosprężystego,
- 3) tłumienie drgań w belce jest opisane modelem Langerera [15] (jednakowy dekrement tłumienia dla wszystkich układów modalnych),
- 4) rozpatruje się drgania pionowe belki i elementów ruchomych,
- 5) podniesienie konstrukcyjne osi belki jest tak dobrane, aby oś belki pod ciężarem własnym była prostoliniowa,
- 6) rozpatruje się procesy izotermiczne,
- 7) obciążenie modelujące pociąg porusza się ze stałą prędkością,
- 8) w modelach M, MM_0 więzy między torem a obciążeniem ruchomym są jednostronne, tzn. przenoszą tylko ściskanie,
- 9) tor jest gładki (nierówności nie występują),
- 10) w chwili początkowej obciążenie ruchome znajduje się poza belką (pierwszy element ruchomy znajduje się nad lewą podporą belki),
- 11) w chwili początkowej oscylatory ruchome są w równowadze statycznej,
- 12) w chwili początkowej belka jest w równowadze statycznej,
- 13) tor poza belką jest prostoliniowy i niepodatny.

3. SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU UKŁADU

Do sformułowania równań ruchu układu belka – obciążenie ruchome zastosowano metodę Lagrange’a - Ritza [15] (metoda energetyczna bazująca na równaniach Lagrange’a II rodzaju i aproksymacji globalnej ugięcia belki) oraz metodę Klasztornego [13] (formułowanie równań ruchu w niejawnej postaci). Metodyka formułowania równań ruchu jest następująca:

- ugięcie pionowe belki jest aproksymowane globalnie szeregiem funkcji spełniających warunki Ritza (kinematycznie dopuszczalny układ zupełny),
- wprowadza się wzajemne oddziaływania (interakcje) pomiędzy skupionymi elementami ruchomymi a torem/belką,
- równania ruchu są formułowane w niejawnej postaci, oddzielnie dla belki i obciążenia ruchomego typu M, M_0 , MM_0 , stosując równania Lagrange’a II rodzaju dla belki i zasadę d’Alemberta dla obciążenia ruchomego,
- gradient pracy obciążenia belki w postaci elementów M, M_0 i MM_0 oblicza się dla wzajemnych oddziaływań w niejawnej postaci,
- masy nieresorowane M w modelach M, MM_0 są traktowane jako podatne; wprowadza się nieważkie więzy sprężyste o odpowiednio dużej sztywności kontaktowej k_M , modelujące podatność pionową zestawów kołowych,
- model sił wzajemnego oddziaływania w modelach M, MM_0 uwzględnia więzy sprężyste jednostronne,
- równania ruchu układu są formułowane z wykorzystaniem rachunku macierzowego.

Rozpatrywane układy są opisane przez następujące parametry wymiarowe i bezwymiarowe:

- l – rozpiętość belki [m],
- m – masa belki na jednostkę długości [kg/m],
- E – moduł Younga materiału belki [Pa],
- I_b – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem poziomej osi centralnej [m⁴],
- EI_b – sztywność giętna belki [N·m²],
- γ – bezwymiarowy współczynnik tłumienia drgań belki ($\gamma_{cr}^1 = 1$) zgodny z modelem Langer'a,
- v – prędkość obciążenia ruchomego (prędkość eksploatacyjna) [m/s],
- P – siła skupiona w modelu P [N], modelująca ciężar przenoszony przez jeden wózek na tor,
- M – masa skupiona nieresorowana w modelach M, MM_o [kg],
- M_o – masa skupiona resorowana w modelach M_o, MM_o [kg],
- k_o – sztywność zawieszenia masy M_o [N/m],
- c_o – współczynnik tłumienia zawieszenia masy M_o [N·s/m],
- k_M – sztywność kontaktowa,
- b_1, b_2 – odstęp między skupionymi elementami ruchomymi, odwzorowujące rozstaw osiowy wózków jezdnych b_1 oraz długość pojazdu $b_1 + b_2$ (pojazd na dwuosiowych wózkach jezdnych).

Ugięcie pionowe belki aproksymowano szeregiem sinusowym spełniającym warunki Ritza (rys. 2):

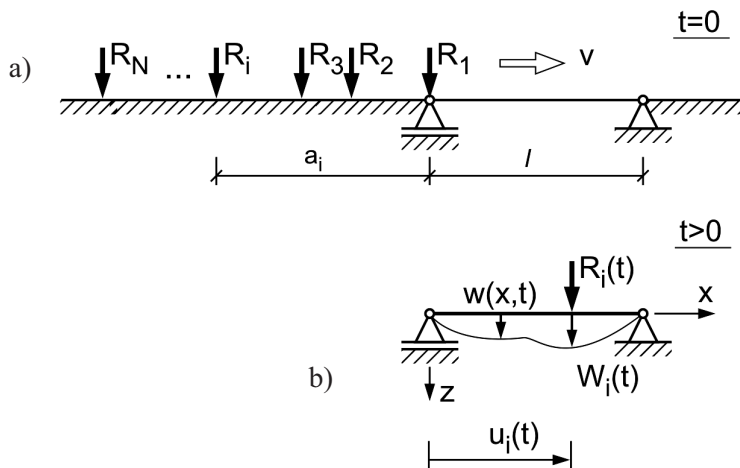
$$w(x, t) = \mathbf{q}^T(t) \mathbf{s}(x) = \mathbf{s}^T(x) \mathbf{q}(t) \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T, \\ \mathbf{s}(x) &= [\sin \pi \xi, \sin 2\pi \xi, \dots, \sin n\pi \xi]^T, \quad \xi = \frac{x}{l}, \end{aligned} \quad (2)$$

przy czym:

- x – odcięta w płaskim układzie współrzędnych xz ,
- t – zmienna czasowa,
- $\mathbf{q}(t)$ – wektor współrzędnych uogólnionych Lagrange'a dla belki,
- $\mathbf{s}(x)$ – wektor funkcji aproksymacyjnych.



Rys. 2. Modele belki i obciążenia ruchomego: a) konfiguracja układu w chwili początkowej, b) ugięcie dynamiczne belki $w(x,t)$ oraz położenie siły $R_i(t)$

Fig. 2. The beam and moving load models: a) configuration of the system at the initial instant, b) the dynamic deflection $w(x,t)$ and the location of the interaction $R_i(t)$

Równania Lagrange'a II rodzaju w odniesieniu do belki mają postać [15]:

$$\frac{d}{dt} [\text{grad } E_k(\dot{\mathbf{q}})] + \text{grad } \Phi(\dot{\mathbf{q}}) + \text{grad } E_p(\mathbf{q}) = \text{grad } L(\mathbf{q}), \quad (3)$$

gdzie $(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}$ oraz:

$E_k(\dot{\mathbf{q}})$ – energia kinetyczna belki,

$\Phi(\dot{\mathbf{q}})$ – moc tłumienia belki,

$E_p(\mathbf{q})$ – energia wewnętrzna (sprężysta) belki,

$L(\mathbf{q})$ – praca obciążenia zewnętrznego belki na przemieszczeniach $w(x,t)$.

Obciążenie zewnętrzne belki stanowi skończony ciąg skupionych sił ruchomych $R_1(t), R_2(t), R_N(t)$, będących dynamicznymi naciskami elementów ruchomych na tor, czyli wzajemnymi oddziaływaniami elementów ruchomych i belki (rys. 2). Symbolem N oznaczono liczbę elementów ruchomych.

Po zastosowaniu przedstawionej metodyki formułowania równań ruchu, otrzymano macierzowe równanie ruchu belki mostowej obciążonej układem sił ruchomych $R_1(t), R_2(t), R_N(t)$, w niejawnej postaci

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{SR}, \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{ml}{2} \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \gamma \frac{\sqrt{EI_b m}}{l} \{\mathbf{d}\}^2, \quad \mathbf{K} = \frac{EI_b}{2l^3} \{\mathbf{d}\}^4, \\
 \mathbf{S} &= [S_1, S_2, \dots, S_N], \quad \mathbf{R} = [R_1, R_2, \dots, R_N]^T, \\
 S_i(t) &= \begin{cases} [\sin \pi(\tau - \alpha_i), \sin 2\pi(\tau - \alpha_i), \dots, \sin n\pi(\tau - \alpha_i)]^T & \text{dla } (\tau - \alpha_i) \in [0, 1], \\ 0 & \text{dla } (\tau - \alpha_i) \notin [0, 1], \end{cases} \quad (5) \\
 \tau &= \frac{vt}{l}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{l}, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \quad \{\mathbf{d}\} = \text{diag}(\pi, 2\pi, \dots, n\pi).
 \end{aligned}$$

Zmienna bezwymiarowa τ określa położenie pierwszej siły względem lewej podpory belki. Operowanie zmienną τ pozwala na porównanie wykresów danej wielkości wynikowej dla różnych prędkości eksploatacyjnych oraz na porównanie wykresu dynamicznego z wykresem quasi-statycznym. Symbolem a_i oznaczono odległość siły R_i od siły R_1 .

Macierzowe równanie ruchu (4) jest układem niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych, drugiego rzędu, o stałych współczynnikach. Sprzężenie drgań z elementami ruchomymi w modelach M , M_0 , MM_0 jest zawarte w wektorze obciążeń uogólnionych. W chwili początkowej $t=0$ belka i oscylatory są w równowadze statycznej.

W przypadku modelu P belka jest obciążona zbiorem N sił ruchomych o stałej wartości P . Wektor sił interakcji jest stały czasie i wynosi:

$$\mathbf{R} = P\mathbf{1}, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$, $\dim \mathbf{1} = N$. Dodatkowe równanie ruchu nie występuje. Macierzowe równanie ruchu (4) jest w postaci jawnej.

W przypadku modelu M (rys. 3) belka jest obciążona zbiorem skupionych mas ruchomych o wartości $M_i = M$. Masę nieresorowaną M zastąpiono masą resorowaną za pomocą sprężyny kontaktowej o sztywności k_M . Sztywność kontaktową można obliczyć z przybliżonego wzoru:

$$k_M = \frac{P}{\delta}, \quad (7)$$

gdzie P jest siłą nacisku wózka dwuosowego na tor, a δ jest skróceniem (w kierunku pionowym) promienia nominalnego kół wózka dwuosowego. Przyjmując $P = 320000$ N, $\delta = 0,4$ mm = 0,0004 m [13], otrzymuje się: $k_M = 8 \cdot 10^8$ N/m.

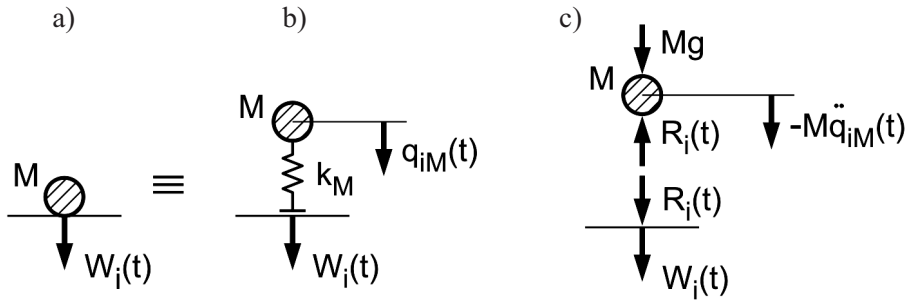
Wprowadzono wektor dodatkowych współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q}_M(t) = [q_{1M}(t), q_{2M}(t), \dots, q_{NM}(t)]^T, \quad (8)$$

gdzie $q_{iM}(t)$ jest przemieszczeniem pionowym masy M . Pod wpływem siły ciężkości Mg następuje skrócenie sprężyny kontaktowej o wartość Mg/k_M . Wzajemne oddziaływanie wynosi:

$$R_i(t) = \begin{cases} k_M [q_i(t) - W_i(t)] & \text{dla } q_{iM}(t) - W_i > 0, \\ 0 & \text{dla } q_{iM}(t) - W_i \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

przy czym $W_i(t)$ jest ugięciem pionowym belki śledzącym położenie masy M .



Rys. 3. Interpretacja sprężyny kontaktowej w modelu M (a i b) oraz układ sił działających na masę M (c)

Fig. 3. Interpretation of the contact spring in the M model (a and b) and the set of forces applied to the M mass (c)

Dodatkowe macierzowe równanie ruchu ekwiwalentnych oscylatorów sprężystych o parametrach M, k_M można wyznaczyć z zasady d'Alemberta

$$\{\mathbf{M}\}\ddot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{G} - \mathbf{R}, \quad (10)$$

gdzie $\{\mathbf{M}\} = M\mathbf{I}, \mathbf{G} = Mg\mathbf{1}$.

W przypadku modelu M_o (rys. 4) belka jest obciążona zbiorem oscylatorów lepko-sprężystych jednomasowych. Wprowadzono wektor dodatkowych współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q}_o(t) = [q_{1o}(t), q_{2o}(t), \dots, q_{N_o}(t)]^T, \quad (11)$$

gdzie $q_{io}(t)$ jest przemieszczeniem pionowym masy M_o . Skrócenie statyczne sprężyny k_o wynosi $M_o g/k_o$. Dodatkowe macierzowe równanie ruchu oscylatorów lepko-sprężystych o parametrach M_o, k_o, c_o można wyznaczyć z zasady d'Alemberta dla masy M_o :

$$\{\mathbf{M}_o\}\ddot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{G}_o - \mathbf{R}, \quad (12)$$

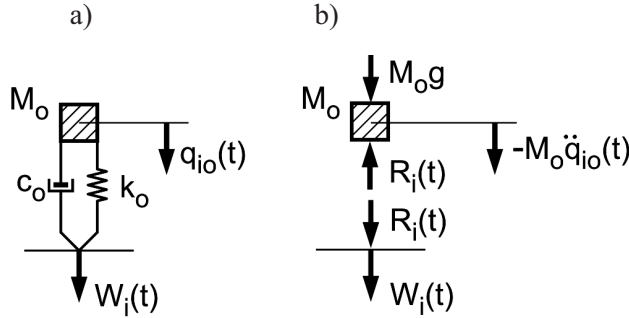
gdzie $\{\mathbf{M}_o\} = M_o\mathbf{I}, \mathbf{G}_o = M_o g\mathbf{1}$. Siła wzajemnego oddziaływania między oscylatorem ruchomym a torem wynosi:

$$R_i(t) = k_o [q_{io}(t) - W_i(t)] + c_o [\dot{q}_{io}(t) - \dot{W}_i(t)], \quad (13)$$

gdzie:

$$\dot{W}_i(t) = \frac{d}{dt} [\mathbf{q}^T(t) \mathbf{S}_i(t)] = \dot{\mathbf{q}}^T(t) \mathbf{S}_i(t) + \mathbf{q}^T(t) \dot{\mathbf{S}}_i(t), \quad \dot{\mathbf{S}}_i(t) = \frac{v}{l} \{\mathbf{d}\} \mathbf{C}_i(t), \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{cases} [\cos \pi(\tau - \alpha_i), \cos 2\pi(\tau - \alpha_i), \dots, \cos n\pi(\tau - \alpha_i)]^T & \text{dla } \tau - \alpha_i \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } \tau - \alpha_i \notin [0, 1]. \end{cases}$$



Rys. 4. Pojedynczy element ruchomy w modelu \$M_o\$ (a) oraz układ sił działających na masę \$M_o\$ (b)

Fig. 4. A single moving element in the \$M_o\$ model (a) and the set of forces applied to the \$M_o\$ mass (b)

W przypadku modelu \$MM_o\$ (rys. 5) belka jest obciążona zbiorem oscylatorów lepko-sprężystych dwumasowych. Masę nieresorowaną \$M\$ zastąpić można masą resorowaną \$M\$ za pomocą jednostronnej sprężyny kontaktowej o sztywności \$k_M\$, podobnie jak w przypadku modelu \$M\$. Wprowadzono dwa wektory dodatkowych współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q}_M(t) = [q_{1M}(t), q_{2M}(t), \dots, q_{NM}(t)]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{q}_o(t) = [q_{1o}(t), q_{2o}(t), \dots, q_{No}(t)]^T,$$

gdzie \$q_{1M}(t)\$, \$q_{io}(t)\$ są odpowiednio przemieszczeniami mas \$M\$, \$M_o\$. Skrócenia statyczne sprężyn, potrzebne do określenia warunków początkowych, obliczamy podobnie jak w przypadku modeli \$M\$, \$M_o\$.

Siły wzajemnego oddziaływania wynoszą:

$$R_i(t) = \begin{cases} k_M [q_{iM}(t) - W_i(t)] & \text{dla } q_{iM}(t) - W_i(t) > 0 \\ 0 & \text{dla } q_{iM}(t) - W_i(t) \leq 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$R_{io}(t) = k_o [q_{io}(t) - q_{iM}(t)] + c_o [\dot{q}_{io}(t) - \dot{q}_{iM}(t)].$$

Dodatkowe macierzowe równanie ruchu dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych o parametrach \$M_o\$, \$M\$, \$k_o\$, \$c_o\$, \$k_M\$ można wyznaczyć z zasady d'Alemberta dla mas \$M_o\$, \$M\$. Wynik końcowy ma postać:

$$\mathbf{B}_s \ddot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{F}_s, \quad (17)$$

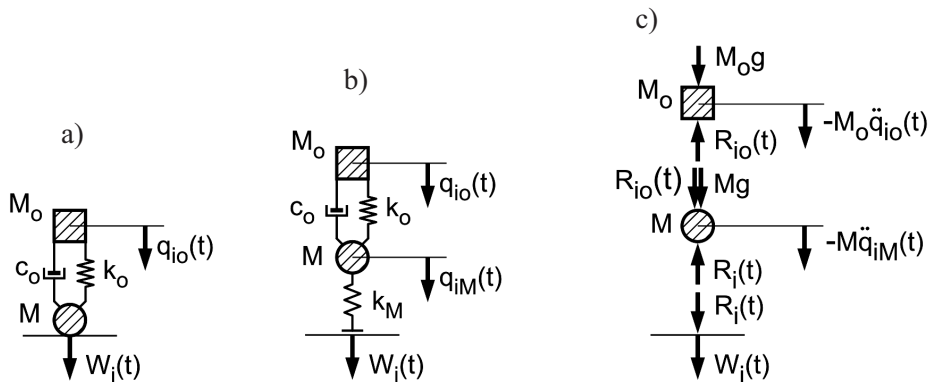
gdzie:

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \{\mathbf{M}_o\} & 0 \\ 0 & \{\mathbf{M}\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \{\mathbf{c}_o\} & -\{\mathbf{c}_o\} \\ -\{\mathbf{c}_o\} & \{\mathbf{c}_o\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \{\mathbf{k}_o\} & -\{\mathbf{k}_o\} \\ -\{\mathbf{k}_o\} & \{\mathbf{k}_o\} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_o \\ \mathbf{q}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_o \\ \mathbf{G} - \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\{\mathbf{M}_o\} = M_o \mathbf{I}, \quad \{\mathbf{M}\} = M \mathbf{I}, \quad \{\mathbf{c}_o\} = c_o \mathbf{I}, \quad \{\mathbf{k}_o\} = k_o \mathbf{I},$$

$$\{\mathbf{G}_o\} = M_o g \mathbf{1}, \quad \mathbf{G} = M g \mathbf{1}, \quad \mathbf{R} = [R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)]^T.$$



Rys. 5. Pojedynczy element ruchomy w modelu MM_o : a) model elementu, b) interpretacja sprężyny kontaktowej w modelu M_o , c) układ sił pionowych działających na masy M , M_o
 Fig. 5. A single moving element in the MM_o model: a) a model of the element, b) interpretation of the contact spring in the M_o model, c) a set of vertical forces applied to the M and M_o masses

4. NUMERYCZNE CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU

Do numerycznego całkowania równań ruchu zastosowano metodę Newmarka z parametrami $\beta_N = 1/4$, $\gamma_N = 1/2$ [16]. Jest to wariant bezwarunkowo stabilny w przypadku równań liniowych jawnych, nieobciążony tłumieniem numerycznym. Algorytm numerycznego całkowania równań ruchu zilustrowano na przykładzie najbardziej złożonego modelu MM_o . Algorytm w swojej idei jest zgodny z algorytmem sformułowanym w monografii [13].

Algorytm całkowania równań ruchu (4, 17) jest typu *implicit* ze względu na wektor oddziaływań wzajemnych \mathbf{R} . Dynamiczna odpowiedź układu jest wyznaczana w równoodległych punktach czasowych w przedziale $[0, T_p]$:

$$t_{j+1} = (j+1)h \quad j=0,1,\dots,N_p - 1, \quad (19)$$

gdzie T_p jest czasem trwania procesu dynamicznego, $h = \Delta t$ jest krokiem czasowym, $N_p = T_p/h$ jest liczbą kroków całkowania. Wprowadzamy wartości dyskretne dla belki:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{q}(t_j), \quad \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{\mathbf{q}}(t_j), \quad \ddot{\mathbf{q}}_j = \ddot{\mathbf{q}}(t_j), \quad \mathbf{S}_{j+1} = \mathbf{S}(t_{j+1}). \quad (20)$$

Formuły rekurencyjne metody Newmarka w odniesieniu do belki mają postać [15, 16]:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{q}_j + h\dot{\mathbf{q}}_j + \frac{1}{4}h^2(\ddot{\mathbf{q}}_j + \ddot{\mathbf{q}}_{j+1}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{j+1} = \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_j + \ddot{\mathbf{q}}_{j+1}). \end{cases} \quad (21)$$

Wektor przyspieszeń na końcu kroku całkowania wyznacza się z warunku kolokacji, co prowadzi do układu algebraicznych równań liniowych:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{V}_{j+1} \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_{j+1}, \quad (22)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \frac{1}{2}h\mathbf{D} = \frac{1}{4}h^2\mathbf{K}, \quad (23)$$

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{S}_{j+1}\mathbf{R}_{j+1} - \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}_j + \frac{1}{2}h\ddot{\mathbf{q}}_j) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_j + h\dot{\mathbf{q}}_j + \frac{1}{4}h^2\ddot{\mathbf{q}}_j).$$

Macierz \mathbf{A} jest odwracana jednokrotnie. W przypadku modelu P wektor \mathbf{R} jest stały w czasie i algorytm jest typu *explicit*.

Dla układu ruchomych oscylatorów dwumasowych wzory (20 - 23) przyjmują postać:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_s(t_j), \quad \dot{\mathbf{q}}_{s,j} = \dot{\mathbf{q}}_s(t_j), \quad \ddot{\mathbf{q}}_{s,j} = \ddot{\mathbf{q}}_s(t_j), \quad \mathbf{R}_j = \mathbf{R}(t_j), \\ \mathbf{q}_{s,j+1} = \mathbf{q}_{s,j} + h\dot{\mathbf{q}}_{s,j} + \frac{1}{4}h^2(\ddot{\mathbf{q}}_{s,j} + \ddot{\mathbf{q}}_{s,j+1}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{s,j+1} = \dot{\mathbf{q}}_{s,j} + \frac{1}{2}h(\ddot{\mathbf{q}}_{s,j} + \ddot{\mathbf{q}}_{s,j+1}), \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_s \ddot{\mathbf{q}}_{s,j+1} = \mathbf{V}_{s,j+1} \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}_{s,j+1} = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{V}_{s,j+1},$$

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{B}_s + \frac{1}{2}h\mathbf{D}_s + \frac{1}{4}h^2\mathbf{K}_s,$$

$$\mathbf{V}_{s,j+1} = \mathbf{F}_s(\mathbf{R}_{j+1}) - \mathbf{D}_s(\dot{\mathbf{q}}_{s,j} + \frac{1}{2}h\ddot{\mathbf{q}}_{s,j}) - \mathbf{K}_s(\mathbf{q}_{s,j} + h\dot{\mathbf{q}}_{s,j} + \frac{1}{4}h^2\ddot{\mathbf{q}}_{s,j}).$$

Zastosowano predykcję liniową wektora \mathbf{R} , tzn.

$$\mathbf{R}_{j+1}^p = 2\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j-1}, \quad (25)$$

przy czym $\mathbf{R}_{-1} = \mathbf{R}_0$ ze względu na równowagę statyczną układu w przedziale $t \leq 0$. Indeks górny p oznacza wartość prognozowaną. Warunki początkowe w wersji rozszerzonej mają postać:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_{s,0} = \begin{bmatrix} [M_o g / k_o + (M_o + M)g / k_M] \mathbf{1} \\ [(M_o + M)g / k_M] \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{s,0} = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_{s,0} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{G}_o + \mathbf{G} = (M_o + M)g \mathbf{1}.$$

Algorytm całkowania równań ruchu (4, 17) składa się z następujących etapów:

- 1) predykcja \mathbf{R}_{j+1}^p według wzoru (25),
- 2) obliczenie $\ddot{\mathbf{q}}_{j+1}, \ddot{\mathbf{q}}_{s,j+1}$ według wzorów (22), (24)₇,
- 3) obliczenie $\mathbf{q}_{j+1}, \dot{\mathbf{q}}_{j+1}, \mathbf{q}_{s,j+1}, \dot{\mathbf{q}}_{s,j+1}$ ze wzorów (21), (24)_{5,6},
- 4) korekcja \mathbf{R}_{j+1}^c według wzoru wynikającego ze wzoru (24):

$$R_{i,j+1}^c = \begin{cases} k_M (q_{iM,j+1} - W_{i,j+1}) & \text{dla } q_{iM,j+1} - W_{i,j+1} > 0, \\ 0 & \text{dla } q_{iM,j+1} - W_{i,j+1} \leq 0, \end{cases} \quad (27)$$

- 5) sprawdzenie warunku zakończenia iteracji

$$|R_{i,j+1}^c - R_{i,j+1}^p| \leq \varepsilon \quad i=1,2,\dots,N, \quad (28)$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest parametrem dokładności; jeśli warunek (28) jest spełniony to następuje przejście do następnego kroku całkowania, jeśli nie jest spełniony, to podstawienie $\mathbf{R}_{j+1}^p = \mathbf{R}_{j+1}^c$ i powrót do etapu 2.

5. PROGNOZA REZONANSÓW SIŁOWYCH

Belka będąca modelem belkowym jednoprzęsłowego mostu kolejowego oraz skończony ciąg elementów ruchomych modelujący pociąg złożony z jednakowych pojazdów szynowych (np. Shinkansen, ICE-3) są obiektami geometrycznie ograniczonymi. Zgodnie z teorią liniowych układów dyskretnych, w przypadku cyklicznego układu sił ruchomych w belce występują rezonanse siłowe [15].

Podstawowy okres własny belki modelującej most wynosi $T_1 = 1/f_1$, gdzie f_1 jest podstawową częstotliwością własną. Zbiór okresów własnych w kolejności malejącej określa wzór:

$$T_j = \frac{T_1}{j^2} = \frac{1}{j^2 f_1} \quad j=1,2,\dots,n. \quad (29)$$

Podstawowy okres wymuszenia drgań belki, wynikającego z cyklicznego układu sił ruchomych, wynosi $T = (b_1 + b_2) / v$. Okresy kolejnych składowych harmonicznych rozwinięcia w szereg Fouriera okresowego wymuszenia belki wynoszą:

$$T_i = \frac{T}{i} = \frac{b_1 + b_2}{iv} \quad i=1,2,\dots. \quad (30)$$

Po uwzględnieniu wzorów (29, 30), rezonans siłowy $T_i = T_j$ realizuje się przy prędkości rezonansowej (krytycznej) obciążenia ruchomego

$$v = v_{i,j} = 3,6 \frac{j^2}{i} (b_1 + b_2) f_1 \quad [\text{km / h}] . \quad (31)$$

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach obciążenia ruchomego drgania belki są procesem przejściowym dążącym do procesu ustalonego. W przypadku modelu P otrzymuje się klasyczne zadanie w postaci drgań liniowego układu dyskretnego wymuszonych okresowo. W pozostałych przypadkach obciążenia ruchomego (M , M_0 , MM_0) występują nowe czynniki zmieniające przebieg procesu przejściowego:

- wymuszenie parametryczno - siłowe drgań belki,
- sprzężenie drgań belki z drganiami mas nieresorowanych lub/i resorowanych,
- odrywanie się mas lub oscylatorów od toru w przypadku dużych lub bardzo dużych prędkości obciążenia.

6. PARAMETRY NUMERYCZNEGO CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RUCHU

Symulowany jest proces dynamiczny obejmujący przejazd skończonego układu elementów ruchomych przez belkę oraz odcinek drgań swobodnych belki. Symulacje obejmują przejazd pociągu złożonego z 5 jednakowych pojazdów na dwuosioowych wózkach jezdnych, modelowanych przez 10 ruchomych elementów skupionych (każdy wózek jezdny odwzorowany przez jeden element). Przyjęto czas trwania procesu dynamicznego równy

$$T_p = \frac{l + 6(b_1 + b_2)}{v} . \quad (32)$$

W dynamicznej odpowiedzi układu występują m.in. oscylacje z najwyższą częstotliwością $\hat{f} = 1 / \hat{T}$. Metoda Newmarka ($\beta_N = 1/4$, $\gamma_N = 1/2$) nie jest obciążona błędem amplitudowym [16]. Krok całkowania określa się z warunku dokładności nałożonego na błąd okresu \hat{T} . Krok całkowania przyjęto równy:

$$h = \hat{T} / 100 , \quad (33)$$

co prowadzi do błędu okresu w odniesieniu do badanych oscylacji $\delta_T = 0,001\hat{T}$ [15, 16]. Tłumienie fizyczne w układzie obniża dokładność rozwiązania, jednak w przypadku tłumienia podkrytycznego do 15% obniżenie dokładności jest pomijalne.

Najwyższa częstotliwość \hat{f} zależy od rozpatrywanego układu i może być oszacowana na podstawie zbioru częstotliwości lokalnych podukładów izolowanych:

1) dominanta widma własnego belki:

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI_b}{m}} , \quad (34)$$

2) częstotliwość lokalna oscylatora M, k_M :

$$f_M = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_M}{M}} , \quad (35)$$

3) częstotliwość lokalna oscylatora M_o, k_o :

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_o}{M_o}} , \quad (36)$$

4) częstotliwość 10-tej składowej harmonicznej wymuszenia cyklicznego:

$$f_s = 10 \frac{v}{b_1 + b_2} . \quad (37)$$

Liczba kroków całkowania wynosi $N_p = T_p / h$. Wartości ekstremalne wielkości wynikowych poszukiwane są we wszystkich krokach całkowania. Parametr ε w warunku zakończenia iteracji przyjęto równy $\varepsilon = 10^{-9} P$. Maksymalną dopuszczalną liczbę iteracji przyjęto równą 15.

7. WYNIKI SYMULACJI

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymuje się:

- wykresy ugięć belki w wybranych przekrojach w funkcji zmiennej τ ,
- wykresy naprężeń normalnych w skrajnych dolnych włóknach belki w wybranych przekrojach w funkcji zmiennej τ ,
- wykresy sił wzajemnego oddziaływania między ruchomymi elementami skupionymi M, M_o, MM_o a torem, w funkcji zmiennej τ ,
- współczynniki dynamiczne ugięć belki,
- współczynniki dynamiczne naprężeń normalnych w belce,
- wskaźniki obciążenia i odciążenia ruchomych elementów skupionych M, M_o, MM_o .

Tęm dla wykresów dynamicznych są wykresy quasi-statyczne wielkości wynikowych. Badane są dwa przekroje charakterystyczne belki o odciętych $x = 0,50l; 0,75l$, czyli $\xi = 0,50; 0,75$. Dynamiczne i quasi-statyczne ugięcia belki w badanych przekrojach są równe (patrz wzory (1, 2)):

$$w(\xi l, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \mathbf{s}(\xi) , \quad w_{qs}(\xi l, \tau) = \mathbf{q}_{qs}^T(\tau) \mathbf{s}(\xi) , \quad (38)$$

gdzie:

$$\mathbf{q}_{qs} = \mathbf{PK}^{-1} \mathbf{S1} \quad (39)$$

jest rozwiązaniem uogólnionym quasi-statycznym wynikającym ze wzorów (4, 6).

Dynamiczny moment gnący w przekroju o odciętej x belki wynosi:

$$M(x, t) = -EI_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -EI_b \mathbf{q}^T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{EI_b}{l^2} \mathbf{q}^T \{\mathbf{d}\}^2 \mathbf{s} . \quad (40)$$

Wskaźnik zginania przekroju poprzecznego belki w odniesieniu do włókien dolnych wynosi $W_b = I_b / h_b$, gdzie h_b jest odległością włókien dolnych od poziomej osi centralnej y przekroju poprzecznego. Naprężenia normalne we włóknach dolnych wynoszą:

$$\sigma(x, t) = \frac{M(x, t)}{W_b} = \frac{h_b}{I_b} \frac{EI_b}{l^2} \mathbf{q}^T \{\mathbf{d}\}^2 \mathbf{s} = \frac{Eh_b}{l^2} \mathbf{q}^T \{\mathbf{d}\}^2 \mathbf{s} . \quad (41)$$

Na podstawie wzoru (41) dynamiczne i quasi-statyczne przebiegi czasowe naprężeń normalnych w dolnych włóknach belki wynoszą

$$\sigma(\xi l, \tau) = \frac{Eh_b}{l^2} \mathbf{q}^T(\tau) \{\mathbf{d}\}^2 \mathbf{s}(\xi) , \quad \sigma_{qs}(\xi l, \tau) = \frac{Eh_b}{l^2} \mathbf{q}_{qs}^T(\tau) \{\mathbf{d}\}^2 \mathbf{s}(\tau) . \quad (42)$$

Współczynniki dynamiczne przemieszczeń i naprężeń normalnych w badanych przekrojach belki zdefiniowano klasycznie, tzn.:

$$\varphi_w(\xi l) = \frac{\max_{\tau} w(\xi, \tau)}{\max_{\tau} w_{qs}(\xi, \tau)} , \quad \varphi_{\sigma}(\xi l) = \frac{\max_{\tau} \sigma(\xi, \tau)}{\max_{\tau} \sigma_{qs}(\xi, \tau)} . \quad (43)$$

Współczynniki ugięć i naprężeń odnoszą się do procesu nieustalonego, odpowiadającego przejazdowi pociągu złożonego z 5 pojazdów szynowych. Zwiększenie liczby pojazdów może spowodować zwiększenie wartości tych współczynników.

Dynamiczne oddziaływania $R_i(\tau)$ $i=1, 2, \dots, N$, obliczane są w punktach całkowania równań ruchu odpowiadających modelom M, M_o , MM_o . Quasi-statyczne oddziaływania są stałe w czasie, tzn.:

$$R_{i,qs}(\tau) = P . \quad (44)$$

Współczynniki obciążenia i odciążenia ruchomych elementów skupionych M, M_o , MM_o są zdefiniowane następująco:

$$\varphi_i = \frac{1}{P} \max_{\tau} R_i(\tau) , \quad \rho_i = \frac{1}{P} \min_{\tau} R_i(\tau) , \quad i=1, 2, \dots, N . \quad (45)$$

Współczynniki obciążenia i odciążenia układu elementów ruchomych M, M_o lub MM_o są zdefiniowane następująco:

$$\max \varphi_R = \max_i \varphi_i , \quad \min \rho_R = \min_i \rho_i , \quad i=1, 2, \dots, N . \quad (46)$$

8. WARTOŚCI PARAMETRÓW UKŁADU I PARAMETRÓW NUMERYCZNEGO CAŁKOWANIA W SYMULACJACH

Badania numeryczne odnoszą się do wybranego mostu kolejowego obciążonego wybranym pociągiem szybkojeźdnym. Belka będąca modelem przęsła mostowego swobodnie podpartego odpowiada jednemu torowi. Konstrukcja nośna mostu jest stalowa, a tor ułożony na podsypce tłuczniowej. Wartości parametrów belki w przybliżeniu odpowiadają obiektowi SB15 opisanemu m.in. w monografii [13]:

$$l = 15,00 \text{ m}, \quad m = 5\,000 \text{ kg}, \quad h_b = 0,80 \text{ m},$$

$$E = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \quad f_1 = 7,00 \text{ Hz}, \quad \gamma = 0,004.$$

Układ elementów ruchomych w przybliżeniu modeluje japoński pociąg Shinkansen złożony z 5 pojazdów szynowych, każdy o długości $b_1 + b_2 = 25,00 \text{ m}$ i rozstawie osiowym wózków jezdnych $b_1 = 17,50 \text{ m}$. Masa nadwozia przy maksymalnym obciążeniu wynosi 40 000 kg, masa ram wózków jednych i zespołów napędowych dwóch dwuosiowych wózków jezdnych jest równa 10 000 kg, masa czterech zestawów kołowych również wynosi 10 000 kg, częstotliwość lokalna zawieszenia nadwozia wynosi $f_o = 1,00 \text{ Hz}$, a współczynnik tłumienia lokalnego zawieszenia nadwozia wynosi $\gamma_o = 0,10$ [13].

Pojazd szynowy na dwóch dwuosiowych wózkach jezdnych modelowano za pomocą 2 elementów ruchomych MM_o , którym odpowiadają następujące parametry [13]:

$$M_o = 25\,000 \text{ kg}, \quad M = 5\,000 \text{ kg}, \quad f_o = 1,00 \text{ Hz}, \quad \gamma_o = 0,10,$$

$$k_o = M_o (2\pi f_o)^2 = 987\,000 \text{ N/m}, \quad c_o = 2\gamma_o \sqrt{k_o M_o} = 31\,400 \text{ Ns/m}.$$

Parametry uproszczonych modeli P, M, M_o mają wartości:

a) model P: $P = 294\,300 \text{ N}$,

b) model M: $M = 30\,000 \text{ kg}$,

c) model M_o : $M_o = 30\,000 \text{ kg}$, $f_o = 1,00 \text{ Hz}$, $\gamma_o = 0,10$,

$$k_o = M_o (2\pi f_o)^2 = 1\,185\,000 \text{ N/m}, \quad c_o = 2\gamma_o \sqrt{k_o M_o} = 37\,700 \text{ Ns/m}.$$

Parametry wspólne modeli P, M, M_o , MM_o mają wartości:

$$P = 294\,300 \text{ N}, \quad k_M = 8 \cdot 10^8 \text{ N/m}, \quad b_1 + b_2 = 25,00 \text{ m}, \quad b_1 = 17,50 \text{ m}, \quad N = 10.$$

Symulacje numeryczne przeprowadzono w przedziale prędkości eksploatacyjnych $v \in [80; 360]$ [km/h]. Warunek (33) jest spełniony dla $h = 10^{-5} \text{ s}$. Parametry numeryczne modelu układu przyjęto równe:

$$n = 10, \quad \varepsilon = 0,001 \text{ N}, \quad L_{it} = 15,$$

gdzie L_{it} jest dopuszczalną liczbą iteracji w przypadku modeli M, M_o , MM_o .

Prędkości rezonansowe cyklicznego układu sił skupionych P obliczono według wzoru (31), gdzie indeks i jest numerem składowej harmonicznego wymuszenia okresowego belki, j jest numerem częstotliwości własnej belki. Prognozowane wartości prędkości rezonansowych (krytycznych) v_{ij} zestawiono w tabelicy, z której wynika, że dla rozpatrywanego układu możliwe do osiągnięcia prędkości rezonansowe odpowiadają podstawowemu układowi modalnemu belki ($j = 1$) oraz harmonicznym wymuszenia okresowego $i = 2, 3, 4, \dots$

Tablica. Wartości prędkości rezonansowych obciążenia ruchomego w postaci cyklicznego układu sił ruchomych (model P)

Table. Values of resonant service speeds of the moving load in the form of a cyclic set of moving forces (the P model)

j	v_{ij} [km/h]						
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
1	630	315	210	157,5	126	105	90
2	2520	1260	840	630	504	420	360

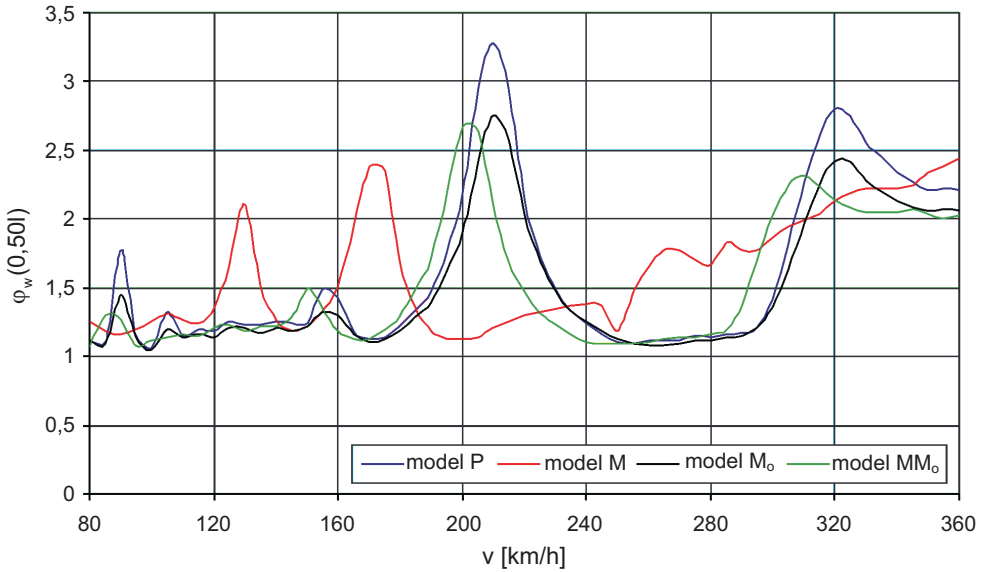
9. WYNIKI BADAŃ NUMERYCZNYCH

Celem badań numerycznych jest ocena wpływu podstawowych cech pojazdów szynowych (masy nieresorowane, masy resorowane) na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego w funkcji prędkości ruchomego obciążenia cyklicznego. Na podstawie wzorów (1 - 46) opracowano program komputerowy w języku Pascal do symulacji drgań nieustalonych rozpatrywanych układów.

Symulacje wykonano w dyskretnym zbiorze prędkości co $\Delta v = 5$ km/h. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6 - 11. Na rys. 6 pokazano wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_w(0,50l)$ odpowiadające modelom P, M, M_0 , MM_0 . Na rys. 7 przedstawiono wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_w(0,75l)$ odpowiadające tym samym modelom. Rysunek 8 przedstawia wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_\sigma(0,50l)$ odpowiadające modelom P, M, M_0 , MM_0 , a rys. 9 – wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_\sigma(0,75l)$ odpowiadające tym modelom. Na rys. 10 pokazano wykresy współczynnika obciążenia $\max \varphi_R$ odpowiadające modelom M, M_0 , MM_0 , a na rys. 11 – wykresy współczynnika odciążenia $\min \rho_R$ odpowiadające tym modelom.

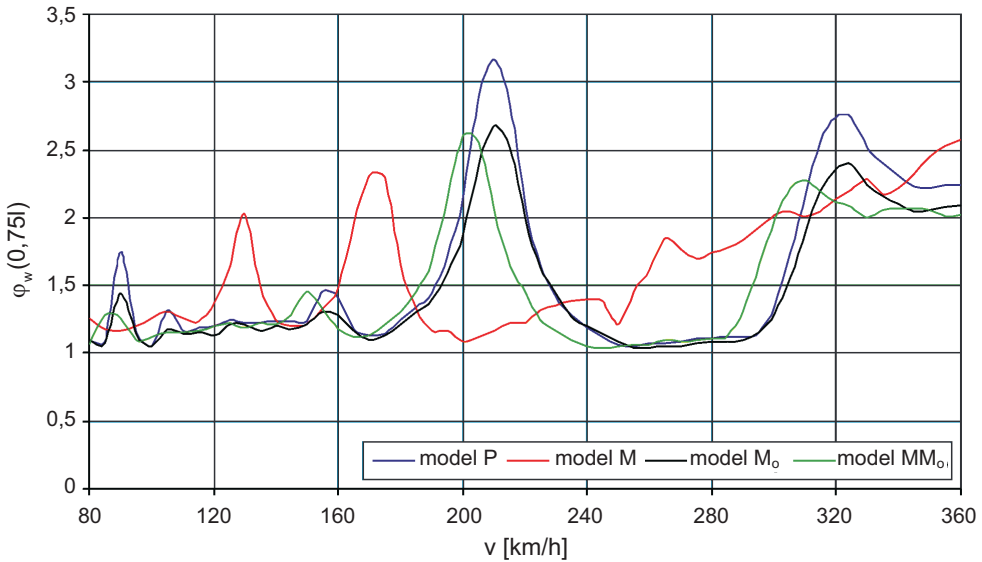
Z analizy wykresów pokazanych na rys. 6 - 11 wynikają następujące wnioski:

1. W przypadku modelu P ujawniają się rezonanse siłowe odpowiadające prędkościom rezonansowym v_{21} , v_{31} , v_{41} , v_{61} , v_{71} . Najniebezpieczniejsze są rezonanse odpowiadające v_{21} , v_{31} .
2. Prognozowane prędkości rezonansowe dla modelu P odnoszą się również do modelu M_0 . Wartości współczynników dynamicznych są mniejsze dla modelu M_0 ze względu na stabilizacyjny wpływ mas resorowanych oraz wpływ tłumienia w zawieszaniach oscylatorów.



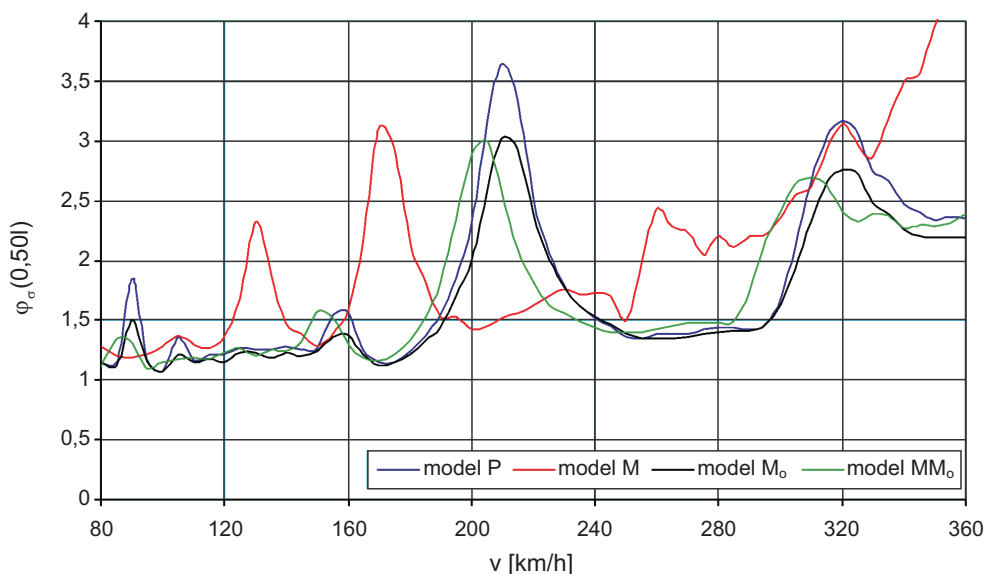
Rys. 6. Wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_w(0,50l)$ odpowiadające modelom P, M, M_o , MM_o

Fig. 6. Diagrams of impact factor $\varphi_w(0,50l)$ corresponding to the P, M, M_o , MM_o models

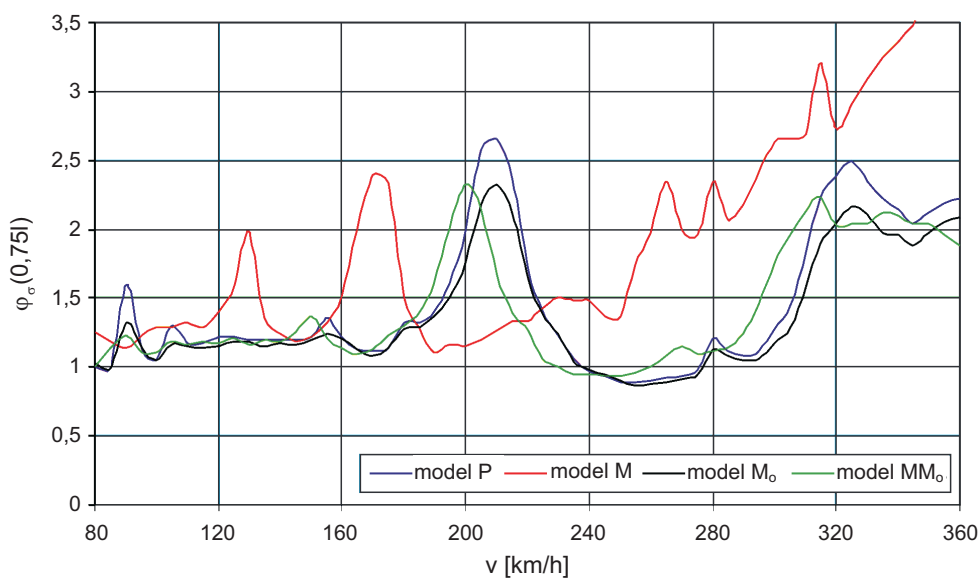


Rys. 7. Wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_w(0,75l)$ odpowiadające modelom P, M, M_o , MM_o

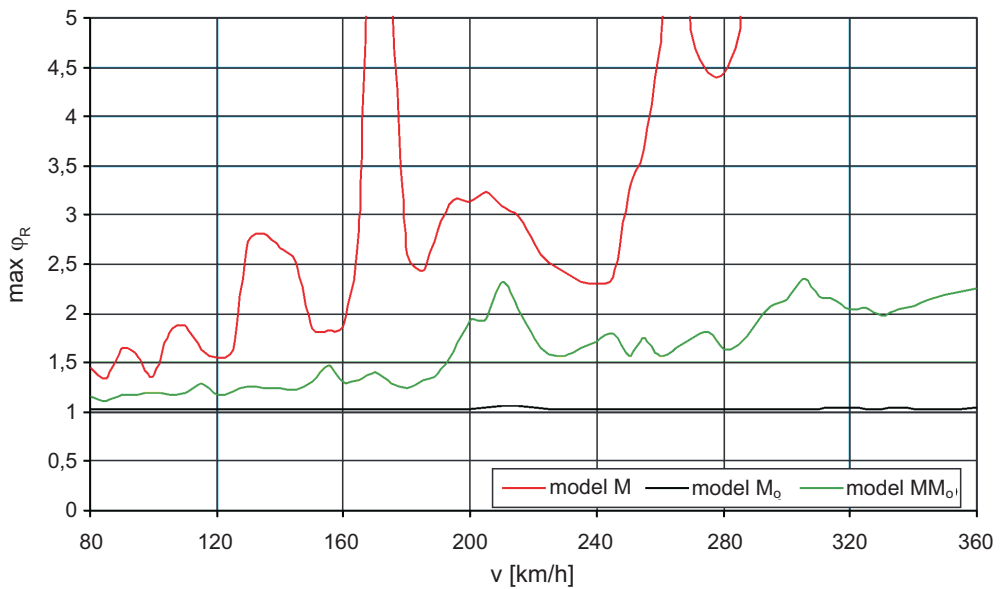
Fig. 7. Diagrams of impact factor $\varphi_w(0,75l)$ corresponding to the P, M, M_o , MM_o models



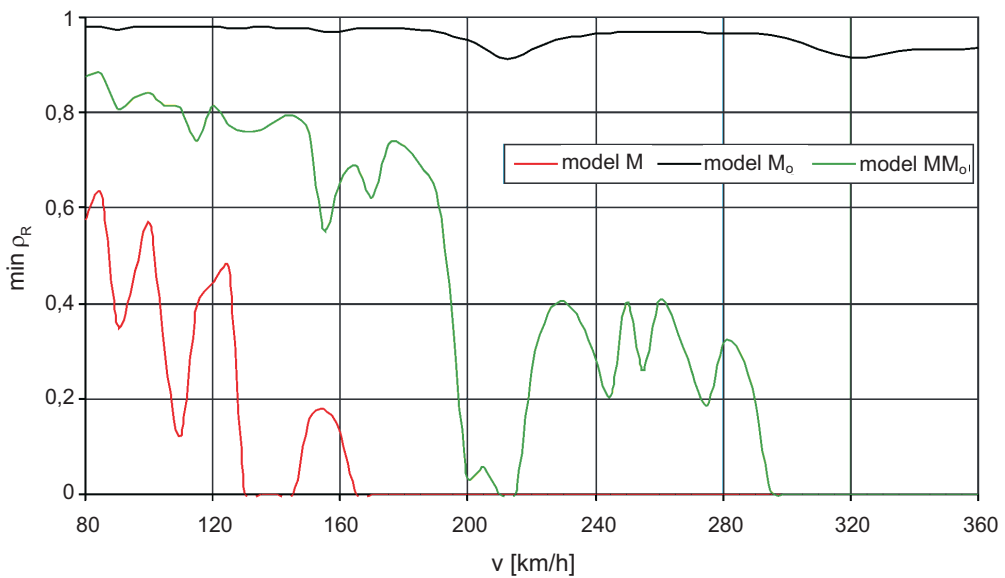
Rys. 8. Wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_{\sigma}(0,50l)$ odpowiadające modelom P, M, M_o , MM_o
 Fig. 8. Diagrams of impact factor $\varphi_{\sigma}(0,50l)$ corresponding to the P, M, M_o , MM_o models



Rys. 9. Wykresy współczynnika dynamicznego $\varphi_{\sigma}(0,75l)$ odpowiadające modelom P, M, M_o , MM_o
 Fig. 9. Diagrams of impact factor $\varphi_{\sigma}(0,75l)$ corresponding to the P, M, M_o , MM_o models



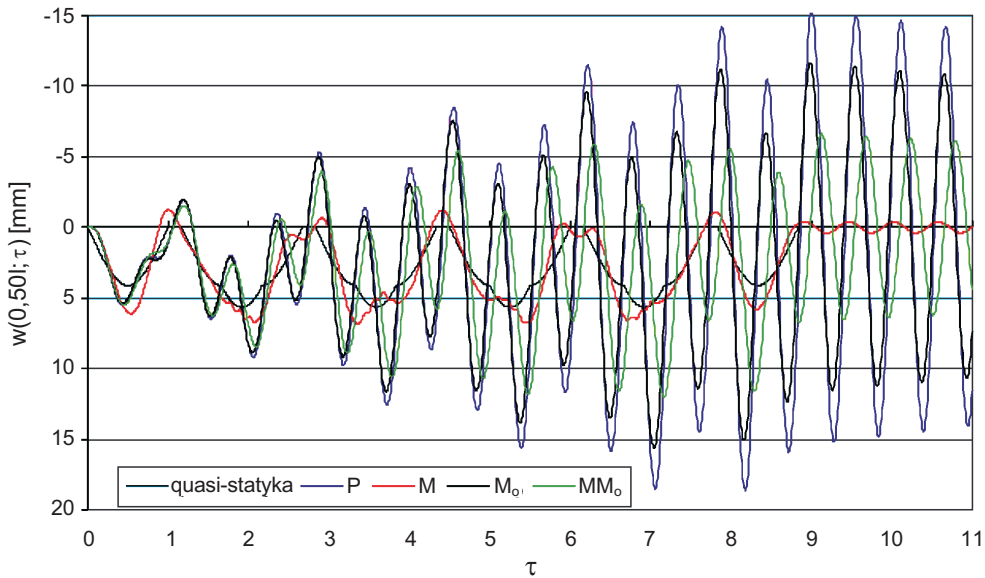
Rys. 10. Wykresy współczynnika obciążenia $\max \varphi_R$ odpowiadające modelom M, M_o , MM_o
 Fig. 10. Diagrams of maximum dynamic interaction $\max \varphi_R$, corresponding to the M, M_o , MM_o models



Rys. 11. Wykresy współczynnika odciążenia $\min \rho_R$ odpowiadające modelom M, M_o , MM_o
 Fig. 11. Diagrams of minimum dynamic interaction $\min \rho_R$, corresponding to the M, M_o , MM_o models

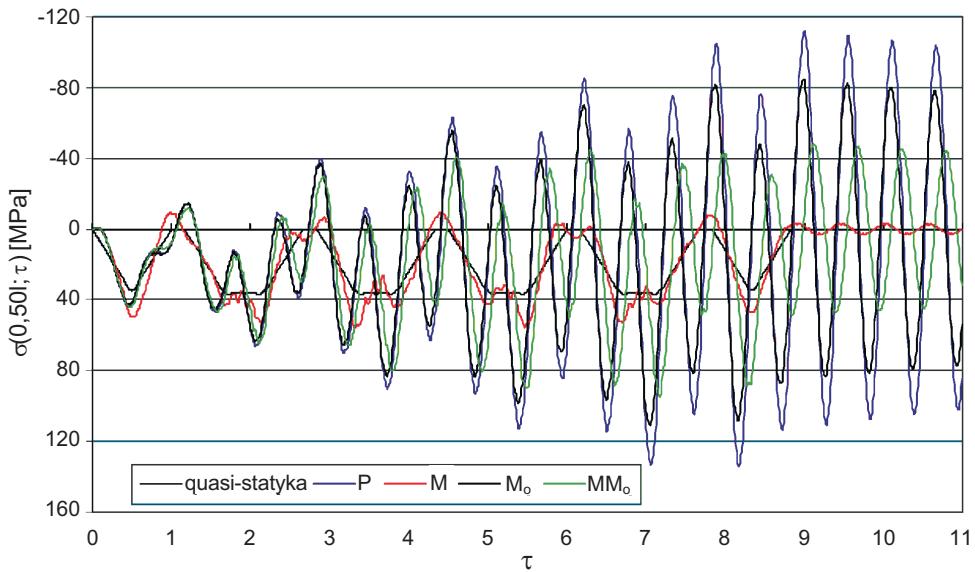
3. W przypadku modelu MM_0 widoczne jest przesunięcie rezonansów w lewo, co jest związane z obniżeniem częstotliwości własnych belki (efekt wymuszenia parametrycznego [13]).
4. Wykresy współczynników dynamicznych dla modelu M odbiegają jakościowo i ilościowo od wykresów dla modelu odniesienia MM_0 . Świadczy to o niedopuszczalności modelu M w obliczeniach inżynierskich.
5. Współczynniki obciążenia odpowiadające modelowi M osiągają wartości $\gg 5$ dla $v=170$ km/h oraz dla $v>285$ km/h. Nieresorowane masy w modelu M odrywają się od toru już przy $v>130$ km/h, co nie jest zgodne z rzeczywistością.
6. W przypadku modelu MM_0 współczynnik obciążenia przyjmuje realne wartości nie przekraczające 2,3. Współczynniki odciążenia są bezpieczne dla $v<190$ km/h. W przedziale $v=210\div 215$ km/h oraz dla $v>295$ km/h występuje odrywanie się oscylatorów dwumasowych od toru.
7. Współczynniki obciążenia i odciążenia w przypadku modelu M_0 nieznacznie odbiegają od wartości dla modelu P.

W celu pokazania różnic ilościowych i jakościowych w odpowiedziach dynamicznych badanego układu dla modeli P, M, M_0 , MM_0 wybrano prędkość rezonansową obciążenia ruchomego $v = v_{31} = 210$ km/h. Wyniki przedstawiono na rys. 12 - 14.



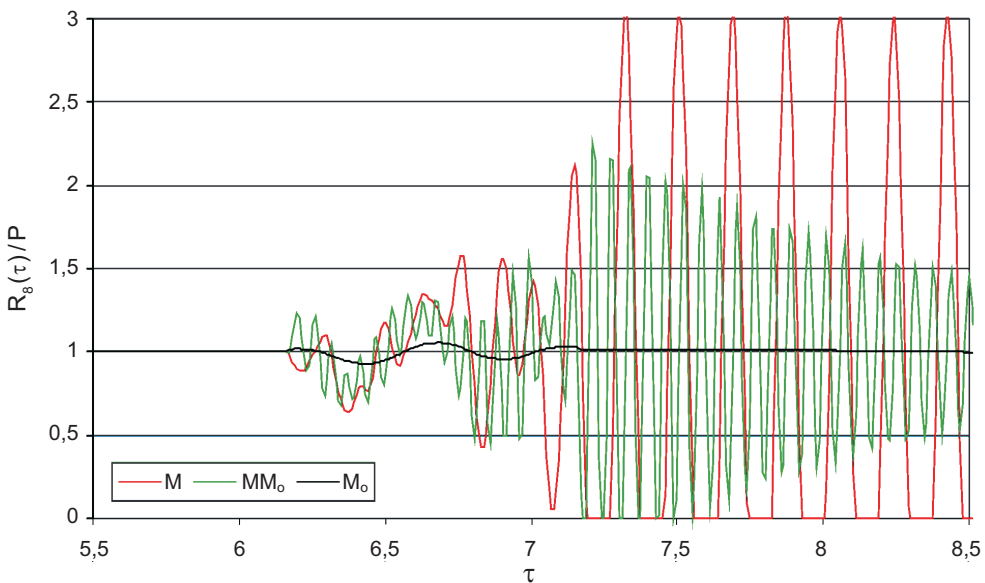
Rys. 12. Wykresy ugięcia dynamicznego $w(0,50l, \tau)$ odpowiadające modelom P, M, M_0 , MM_0 , na tle wykresu ugięcia quasi-statycznego ($l=15$ m; $v=210$ km/h)

Fig. 12. Diagrams of dynamic deflection $w(0,50l, \tau)$ for the P, M, M_0 , MM_0 models, against the quasi-static deflection diagram background ($l=15$ m; $v=210$ km/h)



Rys. 13. Wykresy naprężenia normalnego dynamicznego $\alpha(0,50l, \tau)$ w dolnych włóknach belki, odpowiadające modelom P, M, M_o , MM_o , na tle wykresu naprężenia normalnego quasi-statycznego ($l=15$ m; $v=210$ km/h)

Fig. 13. Diagrams of dynamic normal stress $\alpha(0,50l, \tau)$ in the bottom fibres of the beam, for the P, M, M_o , MM_o models, against the quasi-static normal stress diagram background ($l=15$ m; $v=210$ km/h)



Rys. 14. Wykresy wzajemnego oddziaływania R_8 (wartość względna) dla modeli M, M_o , MM_o ($l=15$ m; $v=210$ km/h)

Fig. 14. Diagrams of interaction (the relative value) R_8 for the M, M_o , MM_o models ($l=15$ m; $v=210$ km/h)

Na rys. 12 pokazano wykresy ugięcia dynamicznego $w(0,50l, \tau)$ odpowiadające modelom P, M, M_0 , MM_0 , na tle wykresu ugięcia quasi-statycznego. Na rys. 13 przedstawiono wykresy naprężenia normalnego dynamicznego $\sigma(0,50l, \tau)$ w dolnych włóknach belki, odpowiadające tym samym modelom, na tle wykresu naprężenia normalnego quasi-statycznego. Rysunek 14 przedstawia wykresy wzajemnego oddziaływania R_8 (wartość względna) dla modeli M, M_0 , MM_0 . Wybrano element ruchomy nr 8 (tylny wózek jezdny czwartego pojazdu szynowego), ponieważ dla tego elementu współczynniki obciążenia i odciążenia przyjmują wartości ekstremalne.

Z wykresów pokazanych na rys. 12 - 14 wynikają następujące wnioski:

1. W przypadku modelu P i prędkości $v=210$ km/h w wykresach ugięć i naprężeń ujawnia się rezonans siłowy trzeciej składowej harmonicznej wymuszenia z pierwszym układem modalnym belki słabo tłumionej. Przy zwiększeniu liczby pojazdów szynowych wartości ekstremalne uległyby dalszemu zwiększeniu.
2. W przypadku modelu MM_0 i prędkości $v=210$ km/h w wykresach ugięć i naprężeń widoczne jest wyjście ze ścisłego rezonansu siłowego trzeciej składowej harmonicznej wymuszenia z pierwszym układem modalnym belki słabo tłumionej.
3. Wykresy wzajemnego oddziaływania $R_8(\tau)$ zasadniczo różnią się od siebie w przypadku modeli M, M_0 , MM_0 . Najbliższy rzeczywistości jest model MM_0 ze względu na uwzględnienie mas nieresorowanych i resorowanych.

10. PODSUMOWANIE

W pracy przeprowadzono symulacje układu testowego do oceny wpływu podstawowych cech pojazdów szynowych (masy resorowane, masy nieresorowane) na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego, w szerokim zakresie prędkości ruchomego obciążenia cyklicznego. Opracowano algorytm numerycznego całkowania równań ruchu bazujący na metodzie Newmarka. Uwzględniono jednostronne więzy między zestawami kołowymi a torem/belką. Proponowana metodyka modelowania i symulacji może być rozszerzona na bardziej zaawansowane modele pojazdów szynowych, stosowane w obliczeniach inżynierskich.

Badania numeryczne przeprowadzono na uproszczonych modelach mostu i pojazdów szynowych, wykorzystując własny program komputerowy. Na podstawie przeprowadzonych badań numerycznych można sformułować następujące wnioski końcowe. W modelowaniu pojazdów szynowych należy uwzględniać masy nieresorowane, zawieszenie lepkosprężyste i masy resorowane. Model MM_0 mający te cechy jest jednak zbyt uproszczony; w modelu zestawu kołowego należałoby uwzględnić oddzielnie: resorowane ramy wózków, nadwozie oraz zawieszenia I i II stopnia. Konieczne jest również uwzględnienie pełnej liczby pojazdów.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Nelson H.D., Conover R.A.*: Dynamic stability of a beam carrying moving masses. ASME J. Applied Mechanics, **38**, 1971, 1003 - 1006
- [2] *Benedetti G.A.*: Dynamic stability of a beam loaded by a sequence of moving mass particles. ASME J. Applied Mechanics, **41**, 1974, 1069 - 1071
- [3] *Chu K.H.* i in.: Railway - bridge impact; simplified train and bridge model. ASCE J. Structural Division, **105**, 9, 1979, 1823 - 1844
- [4] *Langer J., Klasztorny M.*: Drgania złożonego układu belkowego pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym. Archiwum Inżynierii Lądowej, **27**, 2, 1981, 261 - 279
- [5] *Borowicz T.*: Metoda elementów skończonych w analizie drgań konstrukcji poddanych działaniu obciążeń ruchomych. ZN PŚk, Budownictwo Nr 15, Kielce, 1984
- [6] *Klasztorny M.*: Dynamiczna stabilność konstrukcji mostowych poddanych działaniu inercyjnych obciążeń ruchomych. Rozprawy Inż., **34**, 3, 1986, 215 - 231
- [7] *Klasztorny M., Langer J.*: Dynamic response of single-span beam bridges to series of moving loads. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, **19**, 8, 1990, 1107 - 1124
- [8] *Yang Y.B.* et al.: Vibrations of simple beams due to trains moving at high speeds. Engineering Structures, **19**, 11, 1997, 936 - 944
- [9] *Cheng Y.S.* et al.: Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element. Engineering Structures, **23**, 2001, 1597 - 1606
- [10] *Fryba L.*: A rough assessment of railway bridges for high speed trains. Engineering Structures, **23**, 2001, 548 - 556
- [11] *Yau J.D.* et al.: Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads. J. Sound & Vibrations, **248**, 1, 2001, 9 - 30
- [12] *Matsuura A.*: Dynamic interaction between vehicles and girders In high Speer railway. RTRI Quarterly Reports, **15**, 3, 1974, 133 - 136
- [13] *Klasztorny M.*: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi. WNT, Warszawa 2005
- [14] *Belotserkovskiy P.M.*: Interaction between a railway track and uniformly moving tandem wheels. J. Sound Vibr., **298**, 2006, 855 - 876
- [15] *Langer J.*: Dynamika budowli. WPWr, Wrocław 1980
- [16] *Newmark N.M.*: A method of computation for structural dynamics. ASCE J. Eng. Mechanics Div., **85**, 3, 1959, 67 - 94

INFORMACJE DODATKOWE

Praca wykonana w ramach projektu badawczego własnego N N509 292335, finansowanego w latach 2008 - 2011 przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

THE INFLUENCE OF RAIL-VEHICLES' PROPERTIES ON DYNAMIC RESPONSE OF A BEAM BRIDGE

Abstract

The study is focused on assessment of the influence of the basic properties of rail-vehicles on the dynamic response of the beam bridge in a wide range of a service velocity of the cyclic moving load. The analysis relates to the following properties: unsprung masses (wheel sets), sprung masses (bogie frames, bodies). The numerical research has been performed with the use of simplified models of a bridge and rail-vehicles. The bridge is modelled as a simply-supported Euler – Bernoulli beam. Four models of the cyclic moving load are taken into account, i.e. the concentrated forces moving system (model P), the concentrated unsprung masses moving system (model M), the single-mass viscoelastic oscillators moving system (model M_o), the double-mass viscoelastic oscillators moving system (model MM_o). The sets of moving elements are finite. The matrix equations of motion governing vibrations of the system has been formulated making use of Lagrange – Ritz and Kłasztorny methods. In case of the M and MM_o models the compliance of wheel sets and one-way constraints between the moving elements and the track are taken into consideration. The numerical investigations have pointed out that the advanced rail-vehicle models should take into account unsprung masses, viscoelastic suspensions and sprung masses.

Keywords

Beam bridge, high-speed train, moving load modelling, railway bridge

